ISSN 1991-3494

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Ш Ы С Ы

ВЕСТНИК

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

THE BULLETIN

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

1944 ЖЫЛДАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С 1944 ГОДА
PUBLISHED SINCE 1944

4

АЛМАТЫ
АЛМАТЫ
ALMATY

2015

ШІЛДЕ
ИЮЛЬ
JULY

Б а с р е д а к т о р

ҚР ҰҒА академигі
М. Ж. Жұрынов

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

биол. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Айтхожина Н.А.**; тарих ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Байпақов К.М.**; биол. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Байтулин И.О.**; биол. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Берсімбаев Р.И.**; хим. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Газалиев А.М.**; а.-ш. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Дуйсенбеков З.Д.**; а.-ш. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Елешев Р.Е.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Қалменов Т.Ш.**; фил. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Нысанбаев А.Н.,**; экон. ғ. докторы, проф., ҰҒА академигі **Сатубалдин С.С.**; тарих ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Әбжанов Х.М.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Әбішев М.Е.**; техн. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Әбішева З.С.**; техн. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Абсадықов Б.Н.** (бас редактордың орынбасары); а.-ш. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Баймұқанов Д.А.**; тарих ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Байтанаев Б.А.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Давлетов А.Е.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Қалимолдаев М.Н.**; геогр. ғ.докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Медеу А.**; техн. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Мырхалықов Ж.У.**; биол. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Огарь Н.П.**; техн. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі. **Таткеева Г.Г.**; а.-ш. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Үмбетаев И.**

Р е д а к ц и я к е ң е с і:

Ресей ҒА академигі **Велихов Е.П.** (Ресей); Әзірбайжан ҰҒА академигі **Гашимзаде Ф.** (Әзірбайжан); Украинаның ҰҒА академигі **Гончарук В.В.** (Украина); Армения Республикасының ҰҒА академигі **Джрбашян Р.Т.** (Армения); Ресей ҒА академигі **Лаверов Н.П.** (Ресей); Молдова Республикасының ҰҒА академигі **Москаленко С.** (Молдова); Молдова Республикасының ҰҒА академигі **Рудик В.** (Молдова); Армения Республикасының ҰҒА академигі **Сагиян А.С.** (Армения); Молдова Республикасының ҰҒА академигі **Тодераш И.** (Молдова); Тәжікстан Республикасының ҰҒА академигі **Якубова М.М.** (Тәжікстан); Молдова Республикасының ҰҒА корр. мүшесі **Лупашку Ф.** (Молдова); техн. ғ. докторы, профессор **Абиев Р.Ш.** (Ресей); техн. ғ. докторы, профессор **Аврамов К.В.** (Украина); мед. ғ. докторы, профессор **Юрген Аппель** (Германия); мед. ғ. докторы, профессор **Иозеф Банас** (Польша); техн. ғ. докторы, профессор **Гарабаджиу** (Ресей); доктор PhD, профессор **Ивахненко О.П.** (Ұлыбритания); хим. ғ. докторы, профессор **Изабелла Новак** (Польша); хим. ғ. докторы, профессор **Полещук О.Х.** (Ресей); хим. ғ. докторы, профессор **Поняев А.И.** (Ресей); профессор **Мохд Хасан Селамат** (Малайзия); техн. ғ. докторы, профессор **Хрипунов Г.С.** (Украина)

Г л а в н ы й   р е д а к т о р

академик НАН РК
М. Ж. Журинов

Р е д а к ц и о н н а я к о л л е г и я:

доктор биол. наук, проф., академик НАН РК **Н.А. Айтхожина**; доктор ист. наук, проф., академик НАН РК **К.М. Байпаков**; доктор биол. наук, проф., академик НАН РК **И.О. Байтулин**; доктор биол. наук, проф., академик НАН РК **Р.И. Берсимбаев**; доктор хим. наук, проф., академик НАН РК **А.М. Газалиев**; доктор с.-х. наук, проф., академик НАН РК **З.Д. Дюсенбеков**; доктор сельскохоз. наук, проф., академик НАН РК **Р.Е. Елешев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Т.Ш. Кальменов**; доктор фил. наук, проф., академик НАН РК **А.Н. Нысанбаев**; доктор экон. наук, проф., академик НАН РК **С.С. Сатубалдин**; доктор ист. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Х.М. Абжанов**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **М.Е. Абишев**; доктор техн. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **З.С. Абишева**; доктор техн. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Б.Н. Абсадыков** (заместитель главного редактора); доктор с.-х. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Д.А. Баймуканов**; доктор ист. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Б.А. Байтанаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **А.Е. Давлетов**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **М.Н. Калимолдаев**; доктор геогр. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **А. Медеу**; доктор техн. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Ж.У. Мырхалыков**; доктор биол. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Н.П. Огарь**; доктор техн. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Г.Г. Таткеева**; доктор сельскохоз. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **И. Умбетаев**

Р е д а к ц и о н н ы й   с о в е т:

академик РАН **Е.П. Велихов** (Россия); академик НАН Азербайджанской Республики **Ф. Гашимзаде** (Азербайджан); академик НАН Украины **В.В. Гончарук** (Украина); академик НАН Республики Армения **Р.Т. Джрбашян** (Армения); академик РАН **Н.П. Лаверов** (Россия); академик НАН Республики Молдова **С. Москаленко** (Молдова); академик НАН Республики Молдова **В. Рудик** (Молдова); академик НАН Республики Армения **А.С. Сагиян** (Армения); академик НАН Республики Молдова **И. Тодераш** (Молдова); академик НАН Республики Таджикистан **М.М. Якубова** (Таджикистан); член-корреспондент НАН Республики Молдова **Ф. Лупашку** (Молдова); д.т.н., профессор **Р.Ш. Абиев** (Россия); д.т.н., профессор **К.В. Аврамов** (Украина); д.м.н., профессор **Юрген Аппель** (Германия); д.м.н., профессор **Иозеф Банас** (Польша); д.т.н., профессор **А.В. Гарабаджиу** (Россия); доктор PhD, профессор **О.П. Ивахненко** (Великобритания); д.х.н., профессор **Изабелла Новак** (Польша); д.х.н., профессор **О.Х. Полещук** (Россия); д.х.н., профессор **А.И. Поняев** (Россия); профессор **Мохд Хасан Селамат** (Малайзия); д.т.н., профессор **Г.С. Хрипунов** (Украина)

«Вестник Национальной академии наук Республики Казахстан». ISSN 1991-3494
Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)
Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан **№5551-Ж**, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год
Тираж: 2000 экземпляров

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел. 272-13-19, 272-13-18.
www: nauka-nanrk.kz, bulletin-science.kz

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2015

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75

E d i t o r i n c h i e f

M. Zh. Zhurinov,
academician of NAS RK

E d i t o r i a l b o a r d:

N.A. Aitkhozhina, dr. biol. sc., prof., academician of NAS RK; **K.M. Baipakov**, dr. hist. sc., prof., academician of NAS RK; **I.O. Baitulin**, dr. biol. sc., prof., academician of NAS RK; **R.I. Bersimbayev**, dr. biol. sc., prof., academician of NAS RK; **A.M. Gazaliyev**, dr. chem. sc., prof., academician of NAS RK; **Z.D. Dyusenbekov**, dr. agr. sc., prof., academician of NAS RK; **R.Ye. Yeleshev**, dr. agr. sc., prof., academician of NAS RK; **T.Sh. Kalmenov**, dr. phys. math. sc., prof., academician of NAS RK; **A.N. Nysanbayev**, dr. phil. sc., prof., academician of NAS RK; **S.S. Satubaldin**, dr. econ. sc., prof., academician of NAS RK; **Kh.M. Abzhanov**, dr. hist. sc., prof., corr. member of NAS RK; **M.Ye. Abishev**, dr. phys. math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **Z.S. Abisheva**, dr. eng. sc., prof., corr. member of NAS RK; **B.N. Absadykov**, dr. eng. sc., prof., corr. member of NAS RK (deputy editor); **D.A. Baimukanov**, dr. agr. sc., prof., corr. member of NAS RK; **B.A. Baytanayev**, dr. hist. sc., prof., corr. member of NAS RK; **A.Ye. Davletov**, dr. phys. math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **M.N. Kalimoldayev**, dr. phys. math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **A. Medeu**, dr. geogr. sc., prof., corr. member of NAS RK; **Zh.U. Myrkhalykov**, dr. eng. sc., prof., corr. member of NAS RK; **N.P. Ogar**, dr. biol. sc., prof., corr. member of NAS RK; **G.G. Tatkeeva**, dr. eng. sc., prof., corr. member of NAS RK; **I. Umbetayev**, dr. agr. sc., prof., corr. member of NAS RK

E d i t o r i a l s t a f f:

E.P. Velikhov, RAS academician (Russia); **F. Gashimzade**, NAS Azerbaijan academician (Azerbaijan); **V.V. Goncharuk**, NAS Ukraine academician (Ukraine); **R.T. Dzhrbashian**, NAS Armenia academician (Armenia); **N.P. Laverov**, RAS academician (Russia); **S.Moskalenko**, NAS Moldova academician (Moldova); **V. Rudic**, NAS Moldova academician (Moldova); **A.S. Sagiyan**, NAS Armenia academician (Armenia); **I. Toderas**, NAS Moldova academician (Moldova); **M. Yakubova**, NAS Tajikistan academician (Tajikistan); **F. Lupaşcu**, NAS Moldova corr. member (Moldova); **R.Sh. Abiyev**, dr.eng.sc., prof. (Russia); **K.V. Avramov**, dr.eng.sc., prof. (Ukraine); **Jürgen Appel**, dr.med.sc., prof. (Germany); **Joseph Banas**, dr.med.sc., prof. (Poland); **A.V. Garabadzhiu**, dr.eng.sc., prof. (Russia); **O.P. Ivakhnenko**, PhD, prof. (UK); **Isabella Nowak**, dr.chem.sc., prof. (Poland); **O.Kh. Poleshchuk**, chem.sc., prof. (Russia); **A.I. Ponyaev**, dr.chem.sc., prof. (Russia); **Mohd Hassan Selamat**, prof. (Malaysia); **G.S. Khripunov**, dr.eng.sc., prof. (Ukraine)

Bulletin of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.
ISSN 1991-3494

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)
The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of Information and Archives of the Ministry of Culture and Information of the Republic of Kazakhstan N 5551-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year
Circulation: 2000 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
http://nauka-nanrk.kz /, http://bulletin-science.kz

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2015

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

BULLETIN OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
ISSN 1991-3494
Volume 4, Number 356 (2015), 70 – 76

ON THE POSSIBILITY OF ASSESSING AND CALCULATING THE SUM OF A SERIES BASED ON THE INTEGRAL FEATURE OF CONVERGENCE OF CAUCHY, MACLAURIN

V. P. Malyshev, Yu. S. Zubrina

Chemical and metallurgical institute named after Zh. Abishev, Karaganda, Kazakhstan.
E-mail: eia_hmi@mail.ru

Keywords: convergence of the series, the sum of a number, equivalence, improper integral, convergence criterion.

Abstract. The authors first time are considering the integral feature of convergence of Cauchy, Maclaurin in terms of the possibility of determining not only convergence, but also the sum of the series with the introduction of equivalence coefficient of a number and the corresponding improper integral. The constancy of this coefficient for each unit interval of variation of the series and integral ensures its applicability to a whole series through the calculation of an improper integral. Thanks to this approach failed to extend many convergent series, and recommend the use of the proposed equivalence factor to determine previously unknown sums of series.

УДК 51

О ВОЗМОЖНОСТИ ОЦЕНКИ И РАСЧЕТА СУММЫ РЯДА НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРИЗНАКА СХОДИМОСТИ КОШИ, МАКЛОРЕНА

В. П. Малышев, Ю. С. Зубрина

Химико-металлургический институт им. Ж. Абишева, Караганда, Казахстан

Ключевые слова: сходимость ряда, сумма ряда, эквивалентность, несобственный интеграл, признак сходимости.

Аннотация. Авторы впервые рассматривают интегральный признак сходимости Коши, Маклорена с точки зрения возможности определения не только сходимости, но и самой суммы ряда с введением коэффициента эквивалентности ряда и соответствующего несобственного интеграла. Постоянство этого коэффициента для любого единичного интервала варьирования ряда и интеграла обеспечивает его применимость для ряда в целом через вычисление несобственного интеграла. Благодаря такому подходу удалось расширить множество сходящихся рядов и рекомендовать использование предложенного коэффициента эквивалентности для определения ранее неизвестных сумм рядов.

Введение. Согласно этому признаку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если для функции $f(x)$, принимающей значения a_n в точках n, т.е. при

$$f(n) = a_n, \tag{1}$$

и при условии монотонного убывания $f(x)$ в области $x \geq n_0$ с соблюдением неравенства $f(x) \geq 0$, обеспечивается сходимость несобственного интеграла $\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx$ [1].

Тем самым этим признаком устанавливается определенная эквивалентность дискретного и непрерывного распределений переменной величины.

Оценка эквивалентности суммы ряда и несобственного интеграла. Эту эквивалентность можно усилить, если полагать, что для тех же условий существует некоторое действительное значение x_0, обеспечивающее равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \int_{x_0}^{\infty} f(x)dx\,. \tag{2}$$

Представляет интерес определение x_0 и сопоставление его с начальными величинами n. Это возможно, если известна сумма ряда $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Тогда из равенства

$$S = \int_{x_0}^{\infty} f(x)dx = F(\infty) - F(x_0) \tag{3}$$

можно освободить x_0.

Например, для известного ряда с $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ сумма $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2$. Тогда

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{2^{x-1}} = \left| -\frac{2^{1-x}}{\ln 2} \right|_{x_0}^{\infty} = -\frac{2^{1-x_0}}{\ln 2}, \tag{4}$$

откуда приравниванием его значению $S = 2$ находим

$$x_0 = 1 - \frac{\ln(2\ln 2)}{\ln 2} \cong 0{,}5288.$$

Это указывает на то, что равенство суммы ряда и интеграла соответствующей функции *f(x)* достигается при $x_0 > 0$, т.е. со сдвигом интервала варьирования вправо от начала координат. Если же варьировать ее от значения $x_0 = 0$, то получится следующая картина (рисунок 1).

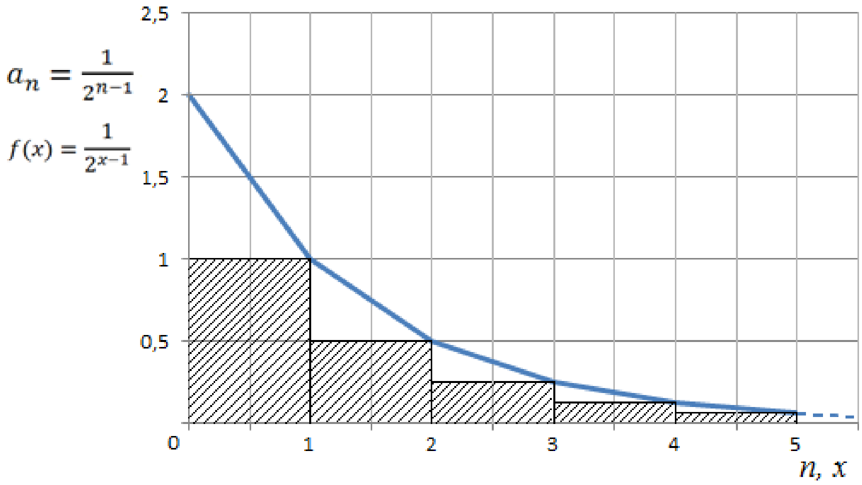

Рисунок 1 – Зависимость общего члена ряда a_n и равной ему площади в единичных дискретных интервалах (заштрихованы) от *n*, а также *f(x)* и $\int_0^x f(x)dx$ в этих же интервалах (на примере известного ряда)

Так как для сопоставления интеграла $\int_{x=0}^{\infty} f(x)dx$, т.е. площади под кривой *f(x)*, с суммой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ необходимо использовать размерность площади, то это автоматически соблюдается умножением a_n на единицу и выражается построением прямоугольника шириной, равной единице, и высотой a_n, численно равной самой единичной площади. Отсюда следует, что для монотонно убывающего ряда ввиду необходимости учета первой площади в интервале от нуля до единицы несобственный интеграл для *f(x)* должен рассчитываться, начиная с $x = 0$. Из соблюдения неравенства $a_{n+1} < a_n$ в каждом единичном интервале, начиная с первого, и из представленного рисунка следует условие сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \int_0^{\infty} f(x)dx\,, \tag{5}$$

если несобственный интеграл сходится.

Тем самым исключается необходимость поиска значения $x \geq n_0$, и процедура определения сходимости ряда по интегральному признаку Коши и Маклорена для монотонно убывающей последовательности унифицируется.

Но более важной представляется возможность оценки численного значения суммы ряда по условию (5). Так, для функции $f(x) = \frac{1}{2^{x-1}}$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{2^{x-1}} = \frac{2}{\ln 2} \cong 2{,}885, \tag{6}$$

что соответствует согласно неравенству (5) значению $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2$.

Подобная оценка по непревышению может быть важной для практических расчетов, когда ряд находится в основе размерных последовательностей.

Введение коэффициента эквивалентности суммы ряда и несобственного интеграла и использование его для определения суммы ряда. Однако соотношение, или степень эквивалентности дискретного и непрерывного распределений может быть учтена более детально на основе рисунка 1, если проанализировать это соотношение по каждому единичному интервалу, находя в нем величину *K*, которую определим как **коэффициент эквивалентности:**

$$K = \frac{a_{n+1}}{\int_{x=n}^{x=n+1} f(x)dx}. \tag{7}$$

Здесь числитель, как и знаменатель, имеют соответствующий двоякий смысл: a_{n+1} – это и член ряда, вычисляемый по общей шкале *n, x*, начинающейся с нуля, и это же площадь прямоугольника, образованного единичным основанием и высотой a_{n+1}; в свою очередь, интеграл является и средним значением функции *f(x)* в единичном интервале и площадью под кривой *f(x)* в этом интервале. Поэтому соотношение рассматриваемых величин, а вместе с этим и сам коэффициент эквивалентности являются совпадающими по размерности.

Вполне очевидно, что если величина *К* окажется равной для каждого единичного интервала, т.е. независимой от *n*, то этот коэффициент будет тождественно равен и отношению суммы ряда к соответствующему несобственному интегралу:

$$K = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}{\int_0^{\infty} f(x)dx}. \tag{8}$$

В этом случае, зная выражения для *К* и для интеграла, можно найти сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = K\int_0^{\infty} f(x)dx. \tag{9}$$

Покажем это на примере ряда с общим членом $a_n = \left(\frac{1}{r}\right)^{n-1} = r^{1-n}$, для которого монотонное убывание функции $f(x) = r^{1-x}$ обеспечивается условием $r > 1$. В соответствии с (7) получим

$$K = \frac{r^{-n}}{\int_{x=n}^{x=n+1} r^{1-x}dx} = \frac{r^{-n}}{\left|-\frac{r^{1-x}}{\ln r}\right|_n^{n+1}} = \frac{r^{-n}}{\frac{r^{1-n}-r^{n}}{\ln r}} = \frac{\ln r}{r-1}. \tag{10}$$

Таким образом, $K \neq f(n)$, что позволяет использовать найденный коэффициент эквивалентности для нахождения суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1} = K\int_0^{\infty} r^{1-x}dx = \frac{\ln r}{r-1}\cdot\left|\left(\frac{r^{1-x}}{\ln r}\right)\right|_0^{\infty} = \frac{\ln r}{r-1}\cdot\frac{r}{\ln r} = \frac{r}{r-1}. \tag{11}$$

Полученный результат не содержит каких-либо ограничений по численному значению *r*, кроме условия $r > 1$. Это позволяет использовать его для выражения и расчета суммы ряда общего вида $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}$ с соответствующими значениями интеграла

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^{x-1}dx = \frac{r}{\ln r} \tag{12}$$

и коэффициента эквивалентности. Расчетные данные по этим величинам приведены в таблице.

Сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}$, интеграл $\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^{x-1}dx$ и коэффициент их эквивалентности *К* как функции *r*

r	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}$	11	6	4,(3)	3,5	3	2,(6)	2,429	2,25	2,(1)	2
$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^{x-1}dx$	11,54	6,582	4,955	4,161	3,700	3,404	3,204	3,062	2,960	2,885
K	0,9531	0,9116	0,8746	0,8412	0,8109	0,7833	0,7580	0,7347	0,7132	0,6932

Продолжение таблицы

3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	50	100
1,5	1,(3)	1,25	1,2	1,1(6)	1,143	1,125	1,(1)	1,053	1,034	1,026	1,(01)
2,731	2,885	3,107	3,349	3,597	3,847	4,096	4,343	6,676	8,820	10,84	21,72
0,5493	0,4621	0,4024	0,3584	0,3243	0,2971	0,2747	0,2558	0,1577	0,1173	0,0946	0,0465

В области $1 < r < 2$ происходит резкое уменьшение суммы ряда с дальнейшим асимптотическим приближением его к единице по мере повышения *r*, что следует из гиперболической формы этой зависимости (11). Как видно из данных этой таблицы, несобственный интеграл при этом проходит через минимум в области между r = 2 и r = 3. Это следует и из дифференцирования функции (12) по переменной r:

$$d\frac{r}{\ln r} = \frac{\ln r - 1}{(\ln r)^2}, \tag{13}$$

откуда после приравнивания ее нулю получаем значение $r = e \approx 2{,}718$. В свою очередь коэффициент эквивалентности, судя по данным таблицы 1 и рисунка 2, имеет два предельных значения в диапазоне $1 \le r \le \infty$.

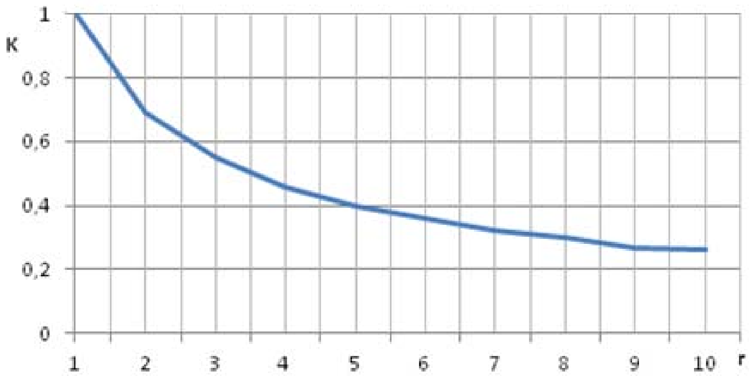

Рисунок 2 – Зависимость коэффициента эквивалентности суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}$ и несобственного интеграла $\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^{1-x}dx$ от параметра r

Эти особенности устанавливаются по правилу Лопиталя в случае появления неопределенностей типа 0/0 или ∞/∞ соответственно

$$\lim_{r\to\infty} K = \lim_{r\to\infty}\frac{\ln r}{r-1} = \frac{0}{0} = \frac{d\ln r}{d(r-1)} = \frac{1}{r} = 1, \tag{14}$$

$$\lim_{r\to\infty} K = \lim_{r\to\infty}\frac{\ln r}{r-1} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{d\ln r}{d(r-1)} = \frac{1}{r} = 0. \tag{15}$$

Следовательно, при наименьшей убыли членов ряда достигается полная эквивалентность (равенство) суммы ряда и соответствующего несобственного интеграла

$$\lim_{K\to 1}\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1} = \int_0^{\infty} r^{1-x}\,dx. \tag{16}$$

Напротив, при наибольшей убыли членов последовательности эквивалентность сравниваемых величин становится исчезающе малой.

Вообще, несмотря на то, что мера эквивалентности суммирования и интегрирования рассматривалась на примере некоторого множества рядов, она в любом случае может оказаться продуктивной при анализе соотношения общего члена ряда и среднеинтегрального значения соответствующей функции в единичном интервале их изменения. Постоянство этого соотношения будет гарантировать возможность вычисления суммы ряда через несобственный интеграл одноименной функции. Если же обнаружится зависимость K от n, то это потребует дополнительного анализа для учета этой зависимости.

Помимо этого, в случае K = const открывается возможность расчета частичных сумм ряда по формуле

$$\sum_{n=1}^{n} a_n = K\int_0^{x=n} f(x)dx. \tag{17}$$

Например, для рассматриваемого ряда общего вида получается выражение, с учетом (10),

$$\sum_{n=1}^{n}\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1} = K\int_{0}^{x=n} r^{1-x}dx = \frac{\ln r}{r-1}\left|-\frac{r^{1-x}}{\ln r}\right|_{0}^{n} = \frac{r-r^{1-n}}{r-1}. \qquad (18)$$

Необходимо отметить также, что предпринятый анализ эквивалентности суммы ряда и соответствующего несобственного интеграла по единичному интервалу их изменения может быть обобщен на анализ по любым дискретным интервалам, равным или неравным, если необходимо удостовериться в постоянстве коэффициента эквивалентности. Выбор единичного интервала представляется более простым и универсальным.

Выводы. Таким образом, основываясь на интегральном признаке сходимости суммы ряда Коши и Маклорена, разработана процедура определения суммы ряда через отношение общего члена и среднеинтегральной величины одноименной функции в пределах единичного интервала их изменения. Это отношение, названное коэффициентом эквивалентности ряда и интеграла

$$K = \frac{a_{n+1}}{\int_{x=n}^{x=n+1} f(x)dx},$$

в случае его постоянства позволяет находить сумму ряда по формуле

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = K\int_{0}^{\infty} f(x)dx.$$

Практические аспекты найденного решения могут быть отнесены к задачам последовательного дробления зерен, деструкции молекул и измельчения материалов [2-10].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бронштейн И. Н. Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – 13-е изд. исправленное. – М.: Наука, Гл. ред. физ. – мат. лит, 1986. -544 с.

[2] Ходаков Г.С. Физика измельчения. – М.: Наука, 1972. - 240 с.

[3] Колмогоров А.Н. О логарифмически нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении // ДАН СССР. – 1941. – Т. 31. - №2. – С. 99-101.

[4] Родигин Н.М., Родигина Э.Н. Последовательные химические реакции. Математический анализ и расчет. – М.: изд. АН СССР, 1960. – 140 с.

[5] Малышев В.П., Турдукожаева (Макашева) А.М., Кайкенов Д.А. Разработка математической модели последовательной деструкции вещества методом прямого интегрирования // Доклады НАН РК. – 2012. – № 4. – С. 5-13.

[6] Малышев В.П., Турдукожаева (Макашева) А.М., Бектурганов Н.С., Кайкенов Д.А. Логарифмически нормальное распределение фракций при измельчении материалов как аттрактор в вероятностной модели процесса // ДАН РК. – 2013. – № 6. – С. 46-52.

[7] Малышев В.П. Молекулярный шарм и гремящее торнадо барабанных шаровых мельниц // Энциклопедия инженера-химика. – 2013. N9. – с. 54-59; V10. – к. 56-60.

[8] V.P. Malyshev, A.M. Turdukozhayeva (Makasheva). What Thunder There and is not Heard When Using Ball Mills? // Journal of Materials Science and Engineering A. – 2013. – № 2. – V. 3. – P. 131-144.

[9] Малышев В.П., Макашева А.М., Бектурганов Н.С., Токбулатов Т.Е., Кравченко В.Г., Кайкенов Д.А. Использование вероятностной модели измельчения для анализа и прогнозирования работы промышленной мельницы // Обогащение руд. – 2014. – N4. – С. 3-7.

[10] Малышев В.П., Бектурганов Н.С., Макашева А.М., Кайкенов Д.А., Токбулатов Т.Е., Кравченко В.Г. Новый подход к измельчению руд // Промышленность Казахстана. – 2014. - №6. – С. 72-74.

REFERENCES

[1] Bronshtejn I. N. Semendjaev K.A. Spravochnik po matematike dlja inzhe-nerov i uchashhihsja vtuzov. – 13-e izd. ispravlennoe. – M.: Nauka, Gl. red. fiz. – mat. lit, 1986. -544 s.

[2] Hodakov G.S. Fizika izmel'chenija. – M.: Nauka, 1972. - 240 s.

[3] Kolmogorov A.N. O logarifmicheski normal'nom zakone raspredelenija razmerov chastic pri droblenii // DAN SSSR. – 1941. – T. 31. - №2. – S. 99-101.

[4] Rodigin N.M., Rodigina Je.N. Posledovatel'nye himicheskie reakcii. Ma-tematicheskij analiz i raschet. – M.: izd. AN SSSR, 1960. – 140 s.

[5] Malyshev V.P., Turdukozhaeva (Makasheva) A.M., Kajkenov D.A. Razra-botka matematicheskoj modeli posledovatel'noj destrukcii veshhestva metodom prjamogo integrirovanija // Doklady NAN RK. – 2012. – № 4. – S. 5-13.

[6] Malyshev V.P., Turdukozhaeva (Makasheva) A.M., Bekturganov N.S., Kajkenov D.A. Logarifmicheski normal'noe raspredelenie frakcij pri izmel'chenii materialov kak attraktor v verojatnostnoj modeli processa // DAN RK. – 2013. – № 6. – S. 46-52.

[7] Malyshev V.P. Molekuljarnyj sharm i gremjashhee tornado barabannyh sha-rovyh mel'nic // Jenciklopedija inzhenera-himika. – 2013. N9. – s. 54-59; V10. – k. 56-60.

[8] V.P. Malyshev, A.M. Turdukozhayeva (Makasheva). What Thunder There and is not Heard When Using Ball Mills? // Journal of Materials Science and Engineering A. – 2013. – № 2. – V. 3. – P. 131-144.

[9] Malyshev V.P., Makasheva A.M., Bekturganov N.S., Tokbulatov T.E., Kravchenko V.G., Kajkenov D.A. Ispol'zovanie verojatnostnoj modeli iz-mel'chenija dlja analiza i prognozirovanija raboty promyshlennoj mel'nicy // Obogashhenie rud. – 2014. – N4. – S. 3-7.

[10] Malyshev V.P., Bekturganov N.S., Makasheva A.M., Kajkenov D.A., Tok-bulatov T.E., Kravchenko V.G. Novyj podhod k izmel'cheniju rud // Promyshlennost' Kazahstana. – 2014. - №6. – S. 72-74.

КОШИ, МАКЛОРЕННІҢ ЖИНАҚТЫЛЫҚ ИНТЕГРАЛДЫ БЕЛГІСІНІҢ НЕГІЗІНДЕ ҚАТАРҒА БАҒА БЕРУ ЖӘНЕ ҚАТАР СОММАСЫН ЕСЕПТЕУ МҮМКІНДІГІ ТУРАЛЫ

В. П. Малышев, Ю. С. Зубрина

Ж. Әбішев атындағы химия-металлургия институты, Қарағанды, Қазақстан

Тірек сөздер: қатардың жинақтылығы, қатар соммасы, эквиваленттілік, меншіксіз интеграл, жинақтылық белгісі.

Аннотация. Авторлар алғаш рет Коши, Маклореннің жинақтылық интегралды белгісін қатар жинақтылығын ғана емес, сонымен қатар қатар соммасының өзін анықтау мүмкіндігін қатардың эквиваленттілік коэффициенті мен сәйкесінше меншіксіз интегралды жүргізумен қарастырады. Аталған коэффициенттің тұрақтылығы қатардың түрленуі кезіндегі кез келген жеке интервал мен интеграл үшін оның жалпы меншіксіз интегралды есептеу арқылы қатар үшін қолданылуын қамтамасыз етеді. Осындай тәсіл арқылы көптеген қосылатын қатарларды кеңейтуге және ұсынылған эквиваленттілік коэффициентін бұған дейін белгісіз қатар соммаларын анықтау мақсатында пайдалану үшін ұсынуға мүмкіндік берді.

Поступила 22.05.2015 г.

Publication Ethics and Publication Malpractice
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see http://www.elsevier.com/publishingethics and http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see http://www.elsevier.com/postingpolicy), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service http://www.elsevier.com/editors/plagdetect.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

www:nauka-nanrk.kz

http://www.bulletin-science.kz/index.php/ru/

Редакторы *М. С. Ахметова, Д. С. Аленов*
Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 21.07.2015.
Формат 60х881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
12,9 п.л. Тираж 2000. Заказ 4.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19