

ISSN 2518-1467 (Online),  
ISSN 1991-3494 (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ  
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

# Х А Б А Р Ш Ы С Ы

---

---

## ВЕСТНИК

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

## THE BULLETIN

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES  
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

1944 ЖЫЛДАН ШЫҒА БАСТАҒАН  
ИЗДАЕТСЯ С 1944 ГОДА  
PUBLISHED SINCE 1944

1

---

АЛМАТЫ  
АЛМАТЫ  
ALMATY

2017

ҚАҢТАР  
ЯНВАРЬ  
JANUARY

Б а с р е д а к т о р ы

х. ғ. д., проф., ҚР ҰҒА академигі

**М. Ж. Жұрынов**

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

**Абиев Р.Ш.** проф. (Ресей)  
**Абишев М.Е.** проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)  
**Аврамов К.В.** проф. (Украина)  
**Аппель Юрген** проф. (Германия)  
**Баймуқанов Д.А.** проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)  
**Байпақов К.М.** проф., академик (Қазақстан)  
**Байтулин И.О.** проф., академик (Қазақстан)  
**Банас Иозеф** проф. (Польша)  
**Берсимбаев Р.И.** проф., академик (Қазақстан)  
**Велихов Е.П.** проф., РҒА академигі (Ресей)  
**Гашимзаде Ф.** проф., академик (Әзірбайжан)  
**Гончарук В.В.** проф., академик (Украина)  
**Давлетов А.Е.** проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)  
**Джрбашян Р.Т.** проф., академик (Армения)  
**Қалимолдаев М.Н.** проф., корр.-мүшесі (Қазақстан), бас ред. орынбасары  
**Лаверов Н.П.** проф., академик РАН (Россия)  
**Лупашку Ф.** проф., корр.-мүшесі (Молдова)  
**Мохд Хасан Селамат** проф. (Малайзия)  
**Мырхалықов Ж.У.** проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)  
**Новак Изабелла** проф. (Польша)  
**Огарь Н.П.** проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)  
**Полещук О.Х.** проф. (Ресей)  
**Поняев А.И.** проф. (Ресей)  
**Сагиян А.С.** проф., академик (Армения)  
**Сатубалдин С.С.** проф., академик (Қазақстан)  
**Таткеева Г.Г.** проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)  
**Умбетаев И.** проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)  
**Хрипунов Г.С.** проф. (Украина)  
**Якубова М.М.** проф., академик (Тәжікстан)

«Қазақстан Республикасы Ұлттық ғылым академиясының Хабаршысы».

**ISSN 2518-1467 (Online),**

**ISSN 1991-3494 (Print)**

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы»РҚБ (Алматы қ.)

Қазақстан республикасының Мәдениет пен ақпарат министрлігінің Ақпарат және мұрағат комитетінде  
01.06.2006 ж. берілген №5551-Ж мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік

Мерзімділігі: жылына 6 рет.

Тиражы: 2000 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,  
www: nauka-nanrk.kz, bulletin-science.kz

---

© Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы, 2017

Типографияның мекенжайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Муратбаева көш., 75.

Г л а в н ы й р е д а к т о р  
д. х. н., проф. академик НАН РК  
**М. Ж. Журинов**

Р е д а к ц и о н н а я к о л л е г и я:

**Абиев Р.Ш.** проф. (Россия)  
**Абишев М.Е.** проф., член-корр. (Казахстан)  
**Аврамов К.В.** проф. (Украина)  
**Апель Юрген** проф. (Германия)  
**Баймуканов Д.А.** проф., чл.-корр. (Казахстан)  
**Байпаков К.М.** проф., академик (Казахстан)  
**Байтулин И.О.** проф., академик (Казахстан)  
**Банас Иозеф** проф. (Польша)  
**Берсимбаев Р.И.** проф., академик (Казахстан)  
**Велихов Е.П.** проф., академик РАН (Россия)  
**Гашимзаде Ф.** проф., академик (Азербайджан)  
**Гончарук В.В.** проф., академик (Украина)  
**Давлетов А.Е.** проф., чл.-корр. (Казахстан)  
**Джрбашян Р.Т.** проф., академик (Армения)  
**Калимолдаев М.Н.** проф., чл.-корр. (Казахстан), зам. гл. ред.  
**Лаверов Н.П.** проф., академик РАН (Россия)  
**Лупашку Ф.** проф., чл.-корр. (Молдова)  
**Мохд Хасан Селамат** проф. (Малайзия)  
**Мырхалыков Ж.У.** проф., чл.-корр. (Казахстан)  
**Новак Изабелла** проф. (Польша)  
**Огарь Н.П.** проф., чл.-корр. (Казахстан)  
**Полещук О.Х.** проф. (Россия)  
**Поняев А.И.** проф. (Россия)  
**Сагьян А.С.** проф., академик (Армения)  
**Сатубалдин С.С.** проф., академик (Казахстан)  
**Таткеева Г.Г.** проф., чл.-корр. (Казахстан)  
**Умбетаев И.** проф., чл.-корр. (Казахстан)  
**Хрипунов Г.С.** проф. (Украина)  
**Якубова М.М.** проф., академик (Таджикистан)

**«Вестник Национальной академии наук Республики Казахстан».**

**ISSN 2518-1467 (Online),**  
**ISSN 1991-3494 (Print)**

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов  
Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5551-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год

Тираж: 2000 экземпляров

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел. 272-13-19, 272-13-18.

www: nauka-nanrk.kz, bulletin-science.kz

---

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2017

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75

E d i t o r i n c h i e f

doctor of chemistry, professor, academician of NAS RK

**M. Zh. Zhurinov**

E d i t o r i a l b o a r d:

**Abiyev R.Sh.** prof. (Russia)  
**Abishev M.Ye.** prof., corr. member. (Kazakhstan)  
**Avramov K.V.** prof. (Ukraine)  
**Appel Jurgen,** prof. (Germany)  
**Baimukanov D.A.** prof., corr. member. (Kazakhstan)  
**Baipakov K.M.** prof., academician (Kazakhstan)  
**Baitullin I.O.** prof., academician (Kazakhstan)  
**Joseph Banas,** prof. (Poland)  
**Bersimbayev R.I.** prof., academician (Kazakhstan)  
**Velikhov Ye.P.** prof., academician of RAS (Russia)  
**Gashimzade F.** prof., academician ( Azerbaijan)  
**Goncharuk V.V.** prof., academician (Ukraine)  
**Davletov A.Ye.** prof., corr. member. (Kazakhstan)  
**Dzhrbashian R.T.** prof., academician (Armenia)  
**Kalimoldayev M.N.** prof., corr. member. (Kazakhstan), deputy editor in chief  
**Laverov N.P.** prof., academician of RAS (Russia)  
**Lupashku F.** prof., corr. member. (Moldova)  
**Mohd Hassan Selamat,** prof. (Malaysia)  
**Myrkhalykov Zh.U.** prof., corr. member. (Kazakhstan)  
**Nowak Isabella,** prof. (Poland)  
**Ogar N.P.** prof., corr. member. (Kazakhstan)  
**Poleshchuk O.Kh.** prof. (Russia)  
**Ponyaev A.I.** prof. (Russia)  
**Sagiyani A.S.** prof., academician (Armenia)  
**Satubaldin S.S.** prof., academician (Kazakhstan)  
**Tatkeyeva G.G.** prof., corr. member. (Kazakhstan)  
**Umbetayev I.** prof., corr. member. (Kazakhstan)  
**Khripunov G.S.** prof. (Ukraine)  
**Yakubova M.M.** prof., academician (Tadjikistan)

**Bulletin of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.**

**ISSN 2518-1467 (Online),**

**ISSN 1991-3494 (Print)**

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of Information and Archives of the Ministry of Culture and Information of the Republic of Kazakhstan N 5551-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 2000 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,  
<http://nauka-nanrk.kz/>, <http://bulletin-science.kz>

---

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2017

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

**A. B. Umbetkulova**Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan.  
E-mail: aliya1988kz@mail.ru**MODELING OF DRILL STRING NONLINEAR  
LONGITUDINAL-TRANSVERSE VIBRATIONS AND THEIR ANALYSIS**

**Abstract.** In this paper the nonlinear mathematical model of longitudinal-transverse vibrations of drill strings, using in the oil and gas industry, are developed. Model of the drill string elastic deformation is based on the assumption of finite deformations, which are set according to the theory of the V. V. Novozhilov finite deformations. The drill string is considered as a rotating elastic rod with acting on it a compressive force and twisting moment. Applying the Hamilton's method, a system of three interrelated nonlinear partial differential equations for the longitudinal and two lateral vibrations of the mechanical system is constructed. Due to the complexity of direct integration of nonlinear models there is using the method of separating the variables, and the system of partial differential equations is reduced to a system of nonlinear differential equations. Numerical analysis is carried out in a symbolic mathematics package Wolfram Mathematica.

**Keywords:** drill string, nonlinear model, longitudinal-transverse vibrations, Galerkin's method.

УДК 539.3:622.23.05

**А. Б. Умбеткулова**

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

**МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫХ  
КОЛЕБАНИЙ БУРИЛЬНОЙ КОЛОННЫ И ИХ АНАЛИЗ**

**Аннотация.** Разработана нелинейная математическая модель продольно-поперечных колебаний бурильных колонн, используемых в нефтегазодобывающей промышленности. Модель упругого деформирования колонн строится при допущении конечности деформаций, которые задаются согласно теории конечных деформаций В. В. Новожилова. Бурильная колонна рассматривается как вращающийся упругий стержень с действующими на нее сжимающей нагрузкой и крутящим моментом. Применяя метод Остроградского-Гамильтона, построена система из трех нелинейных взаимозависимых уравнений в частных производных для продольных и поперечных колебаний механической системы. Из-за сложности прямого интегрирования нелинейной модели применяется метод разделения переменных, и система уравнений в частных производных сводится к системе нелинейных дифференциальных уравнений, численный анализ которых производится в пакете символьной математики Wolfram Mathematica.

**Ключевые слова:** бурильная колонна, нелинейная модель, продольно-поперечные колебания, потенциал упругого деформирования, метод Бубнова-Галеркина.

**Введение.** При современном интенсивном освоении и добыче нефти большое внимание уделяется проблеме эффективного бурения скважин в нефтегазодобывающей промышленности. Безаварийность работ по бурению скважин, скорость их бурения и добычи нефти зависят от качества и совершенства буровых машин и инструментов, что делает отрасль нефтегазового оборудования одной из динамично развивающихся отраслей. Режим работы буровой машины в полной мере зависит от устойчивости и прочности буровых штанг. Потеря устойчивости прямолинейной формы буровых штанг ведет к искривлению скважин, приводящих их к негодности [[1]-[3], др.].

Поэтому исследования по моделированию динамики буровых штанг с учетом их деформационных свойств, влияния последних на динамические характеристики систем в целях оптимизации эксплуатационных режимов бурильных колонн и обеспечения безопасности работы являются одними из приоритетных направлений современных исследований в области промышленного оборудования. А разработка реалистичных моделей буровая штанга-скважина с учетом осложняющих факторов с целью повышения их прочности и надежности представляет научный и практический интерес.

Известно, что большинство работ по исследованию динамики буровых колонн направлены на моделирование и анализ вибраций колонн, вызывающих потерю устойчивости движения бурового оборудования и нарушению их прочностных свойств [[4]-[15], др.]. При этом одним из распространенных допущений авторов является наложение ограничений на величины деформаций бурильных колонн при их моделировании, то есть их малость [[8]-[12], др.], что ведет к линейризации модели. Другим допущением моделей является ограничение степеней свободы деформирования буровой штанги, то есть раздельное исследование составляющих их сложного пространственного деформирования, как это делают авторы работ [[13]-[15], др.]. Все это вызывает ограниченность моделей и существенно сужает представление о реалистичности моделируемых процессов в системе буровая штанга-скважина, так как не представляется возможным описание большого разнообразия факторов, осложняющих движение буровой штанги.

Целью данной работы является разработка нелинейной математической модели пространственного деформирования вращающейся бурильной колонны с учетом конечных деформаций. Усложнение модели за счет нелинейности и увеличения размерности системы вследствие совместного рассмотрения компонент упругой деформации штанги приводит к повышению реалистичности движения всей системы.

**Нелинейная математическая модель.** Модель упругого деформирования буровых штанг будет строиться при допущении конечности деформаций, которые задаются согласно теории конечных деформаций В. В. Новожилова [[16]]. Применяется вторая система упрощений по В. В. Новожилову, согласно которой компоненты деформации и углы поворота полагаются малыми по сравнению с единицей, что позволяет пренебречь величинами второго и более порядка малости, удерживая при этом углы поворота во второй степени [[16]]. По гипотезе плоских сечений [[17], [18]] предполагается, что поперечные сечения стержня при деформации остаются плоскими и перпендикулярными к его деформированной оси, а нормальные напряжения на площадках, параллельных оси, являются пренебрежимо малыми.

Помимо поперечных колебаний буровой штанги, происходящих в двух плоскостях  $Oxz$  и  $Oyz$ , также рассматривается поступательное смещение ее поперечного сечения вдоль оси штанги  $z$ . Тогда компоненты перемещений  $U(x, y, z, t), V(x, y, z, t), W(x, y, z, t)$  бурильной колонны, представленной в виде колеблющегося стержня, принимают вид:

$$\begin{aligned} U(x, y, z, t) &= u(z, t), \\ V(x, y, z, t) &= v(z, t), \\ W(x, y, z, t) &= w(z, t) - \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} x - \frac{\partial v(z, t)}{\partial z} y, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u(z, t), v(z, t)$  - перемещение центра изгиба поперечного сечения вдоль осей  $x, y$  вследствие изгиба,  $w(z, t)$  - поступательное смещение вдоль оси  $z$ .

Для вывода математической модели применяется вариационный принцип Остроградского-Гамильтона. Определяется функционал упругого деформирования. В данном случае он имеет вид:

$$\Phi = \frac{G}{1-2\nu} \left( \frac{1}{2} (\omega_x^4 + \omega_y^4) + (1-\nu) e_{zz}^2 + e_{zz} (\omega_x^2 + \omega_y^2) + \frac{5-6\nu}{2} (\omega_x^2 \omega_y^2) \right) \quad (2)$$

где  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  - модуль сдвига,  $E$  - модуль Юнга (модуль упругости материала),  $\nu$  - коэффициент

Пуассона,  $e_{zz}$  определяет относительное удлинение параллельно оси  $z$ ,  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  - углы поворота относительно соответствующих осей:

$$e_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z}, \quad \omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right), \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right), \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right). \quad (3)$$

Через найденный функционал  $\Phi$  (2)-(3) определяется потенциальная энергия стержня:

$$U_0 = \int_0^l \frac{G}{1-2\nu} \left( \frac{1}{2} \left( A \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^4 + A \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^4 \right) + (1-\nu) \left( A \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + I_y \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 + I_x \left( \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2I_{xy} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + A \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial z} + A \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{5-6\nu}{2} A \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right) dz. \quad (4)$$

где  $I_x, I_y$  - осевые моменты инерции,  $I_{xy}$  - центробежный момент инерции,  $A$  - площадь поперечного сечения буровой штанги.

Кинетическая энергия стержня с учетом вращения буровой колонны записывается в следующем виде:

$$T_{кин} = \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left[ A \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + A \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + A \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + I_y \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} \right)^2 + 2I_{xy} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t} + I_x \left( \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t} \right)^2 + \right. \\ \left. + I_p \omega^2 + A(u^2 + v^2) \omega^2 + 2\omega A v \frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega A u \frac{\partial v}{\partial t} \right] dz, \quad (5)$$

где  $\rho$  - плотность материала буровой колонны,  $\omega$  - скорость вращения стержня.

Для получения нелинейной математической модели упругих колебаний буровой колонны применяется вариационный принцип Остроградского-Гамильтона [[17]-[20]]. Данный принцип позволяет охарактеризовать движение буровой колонны в целом на произвольном промежутке времени от  $t_1$  до  $t_2$ :

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \delta (T_{кин} - U_0 + \Pi) dt = 0, \quad (6)$$

где  $\Pi$  - потенциал внешних сил, учитывающий действие внешних продольной нагрузки  $N(z,t)$  и крутящего момента  $M(z,t)$ .

Ввиду симметричности поперечного сечения стержня вдоль осей  $x$  и  $y$  осевые моменты будут равны между собой  $I_x = I_y = I$ , а центробежный момент инерции будет равен нулю  $I_{xy} = 0$ .

Разработана следующая нелинейная модель, описывающая продольно-поперечные колебания вращающейся буровой колонны как пространственно деформируемого упругого стержневого элемента с действующими на него сжимающей нагрузкой и крутящим моментом:

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial t^2} - \rho A \omega^2 u + 2\rho A \omega \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( N(z,t) \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( M(z,t) \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \\ + EI \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - \frac{EA}{(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^3 + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} \right] - \frac{EA(5-6\nu)}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial u}{\partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] = 0, \\ \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4 v}{\partial z^2 \partial t^2} - \rho A \omega^2 v - 2\rho A \omega \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( N(z,t) \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( M(z,t) \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \\ + EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - \frac{EA}{(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^3 + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right] - \frac{EA(5-6\nu)}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial v}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] = 0, \\ \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( N(z,t) \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{EA}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] = 0, \quad (7)$$

с краевыми условиями:

$$\begin{aligned}
 u(z, t) = v(z, t) = 0 \quad (z = 0, z = l) \\
 EI \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} = EI \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial z^2} = 0 \quad (z = 0, z = l), \\
 EA \frac{w(z, t)}{\partial z} = 0 \quad (z = 0, z = l).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Модель (7) с краевыми условиями (8) носит нелинейный характер и описывает изгибно-продольные колебания буровых штанг. Она обобщает известные модели, описывающие нелинейные колебания упругого стержня, учитывая вращение стержня с учетом конечных деформаций, применяя к динамическим задачам бурового оборудования нефтегазодобывающей промышленности, в частности, буровым штангам.

**Численное моделирование.** Из-за сложности прямого интегрирования нелинейной модели (7), она приводится к удобному для этого виду путем применения известного метода разделения переменных – метода Бубнова-Галеркина, где форма изгиба оси буровой штанги задается спектром гармонических форм. Для получения полной картины колебательного процесса рассматриваются трехмодовые приближения, и функции перемещений  $u(z, t)$ ,  $v(z, t)$  и  $w(z, t)$  представляются в виде:

$$\begin{aligned}
 u(z, t) &= \sum_{k=1}^3 \overline{u}_k(t) \sin\left(\frac{k\pi z}{l}\right), \\
 v(z, t) &= \sum_{k=1}^3 \overline{v}_k(t) \sin\left(\frac{k\pi z}{l}\right), \\
 w(z, t) &= \sum_{k=1}^3 \overline{w}_k(t) \cos\left(\frac{k\pi z}{l}\right).
 \end{aligned} \tag{9}$$

Базисные функции  $\sin\left(\frac{k\pi z}{l}\right)$  и  $\cos\left(\frac{k\pi z}{l}\right)$  выбраны таким образом, чтобы они удовлетворяли граничным условиям (8).

Реализация метода Бубнова-Галеркина и дальнейшее численное решение проводится в универсальной математической среде Wolfram Mathematica. Для расчетов используются следующие значения параметров буровой колонны: модуль Юнга  $E = 0.7 \times 10^5 \text{ МПа}$ , плотность материала  $\rho = 2700 \text{ кг/м}^3$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0.34$  (для дюралюминиевых буровых колонн), внешний диаметр штанги  $D = 0.2 \text{ м}$ , внутренний диаметр  $d = 0.12 \text{ м}$ , длина буровой колонны  $l = 150 \text{ м}$ , частота вращения  $\omega = 30 \text{ об/мин}$ , продольная сжимающая нагрузка  $N(z, t) = 2.2 \times 10^3 \text{ Н}$ , крутящий момент  $M(z, t) = 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Рассматривается поперечное сечение, отступающее на расстояние  $z = \frac{2}{9} l \text{ м}$  от верхнего конца штанги  $\left(z_k = \frac{2}{9}\right)$ .

На рисунках 1, 2 показаны поперечные и продольные колебания буровой колонны с функциями перемещений  $u(z, t)$ ,  $v(z, t)$  и  $w(z, t)$  при заданных параметрах механической системы. Полученные графики показывают, что амплитуда поперечных колебаний на несколько порядков превосходит амплитуду продольных колебаний. Поперечные колебания являются доминирующими в процессе деформирования колонны.

На рисунках 3а и 3б изображено распространение нелинейных поперечных колебаний штанги по всей длине буровой колонны в фиксированные моменты времени. Колебание происходит по синусоидальной форме, разложение по трем полуволнам, как и предполагалось в представлении

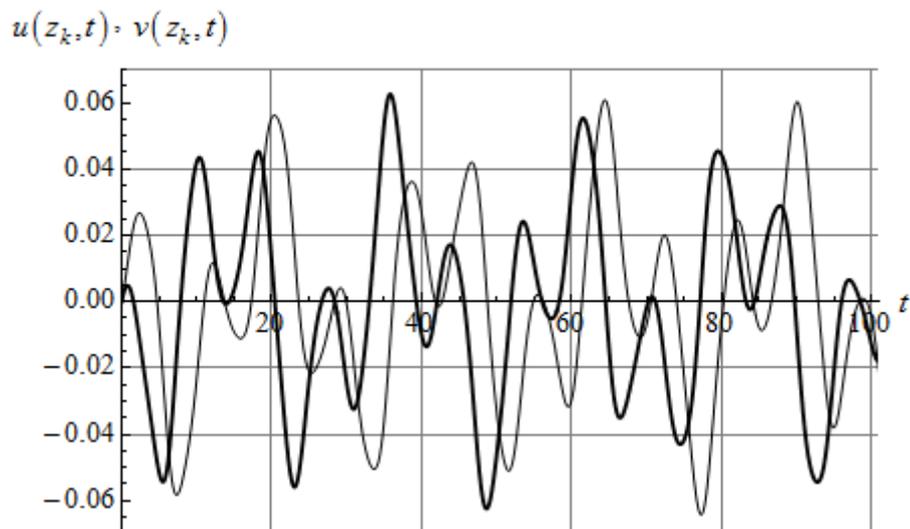


Рисунок 1 – Поперечные колебания  $u(z_k, t)$  (—) и  $v(z_k, t)$  (---) дюралюминиевой бурильной колонны

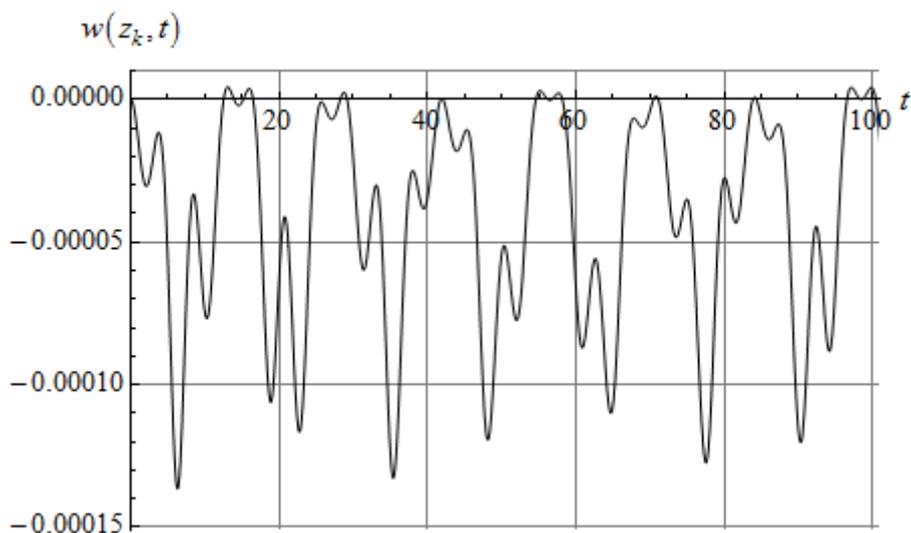


Рисунок 2 – Продольные колебания  $w(z_k, t)$  дюралюминиевой бурильной колонны

решения (9). Рассмотрено распространение амплитуд продольных колебаний бурильной колонны по всей ее длине в фиксированные моменты времени (рисунки 4а-4г).

Продольные колебания происходят по косинусоидальной форме, в срединном поперечном сечении колебательного процесса не будет. В большинстве случаев распространение амплитуд колебаний по длине происходит так, как изображено на рисунке 4а. Максимальные амплитуды достигаются ближе к верхнему и нижнему концам бурильной колонны, а ближе к середине штанги – амплитуды уменьшаются. Причем, заметно, что верхняя половина бурильной колонны колеблется лишь в отрицательную сторону, а нижняя половина – в положительную сторону от недеформированного состояния. Это говорит о сжатии бурильной колонны по оси  $z$ . Однако, рассматривая многомодальное разложение решения, в определенные моменты времени распространение амплитуд продольных колебаний происходит как изображено на рисунках 4б-4г.

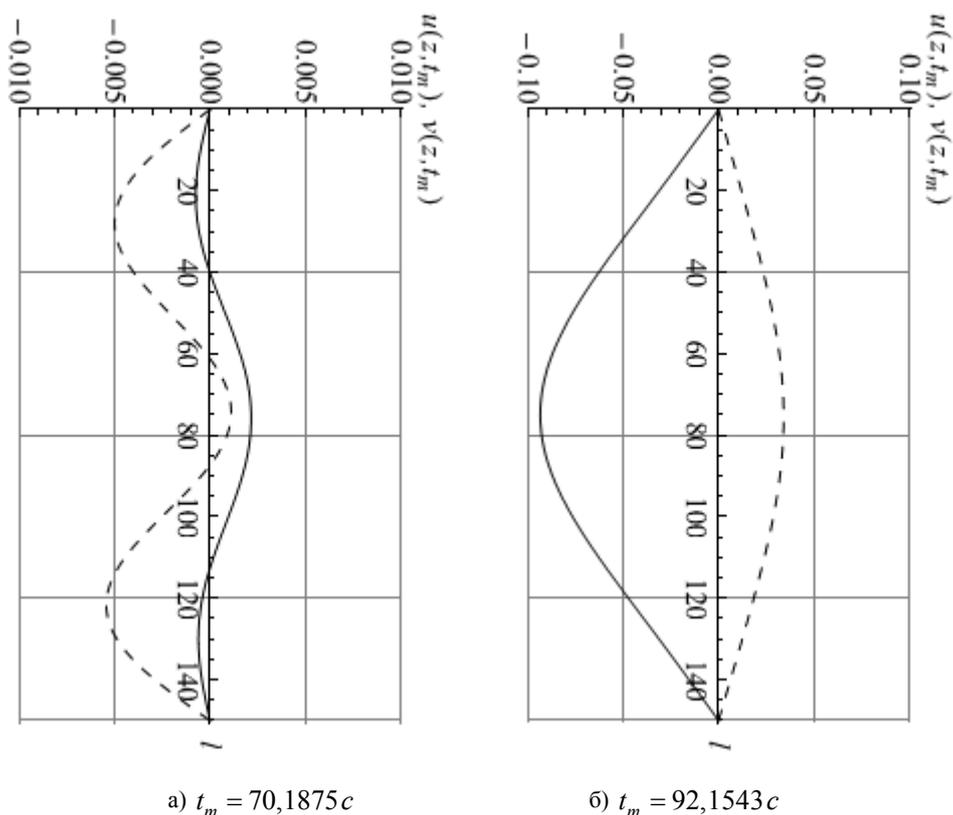


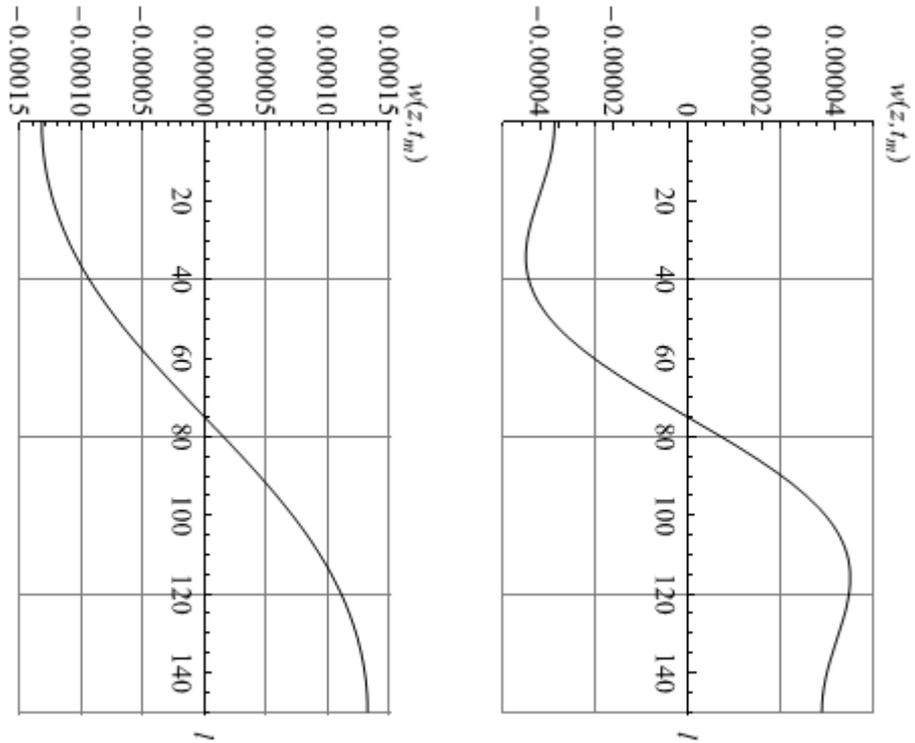
Рисунок 3 – Распространение поперечных колебаний  $u(z, t_m)$  (————) и  $v(z, t_m)$  (-----) по длине бурильной колонны

На рисунках 5а-5б и 6а-6б исследованы параметрические кривые поперечных колебаний  $u(z, t)$  и  $v(z, t)$  друг относительно друга для различных длин и частот вращения бурильной колонны в точке  $z = 4/9l$ .

На рисунках 5а и 5б изображены кривые, полученные в течение времени  $t = 180c$ . На рисунках 6а и 6б результаты получены для колонн длиной  $l = 100m$  при частоте вращения  $\omega = 15 об / мин$  в разные моменты времени. Установлена необходимость учета пространственных поперечных колебаний, так как присутствует вращательный процесс, и инерция от вращения оказывает существенное влияние на колебательный процесс.

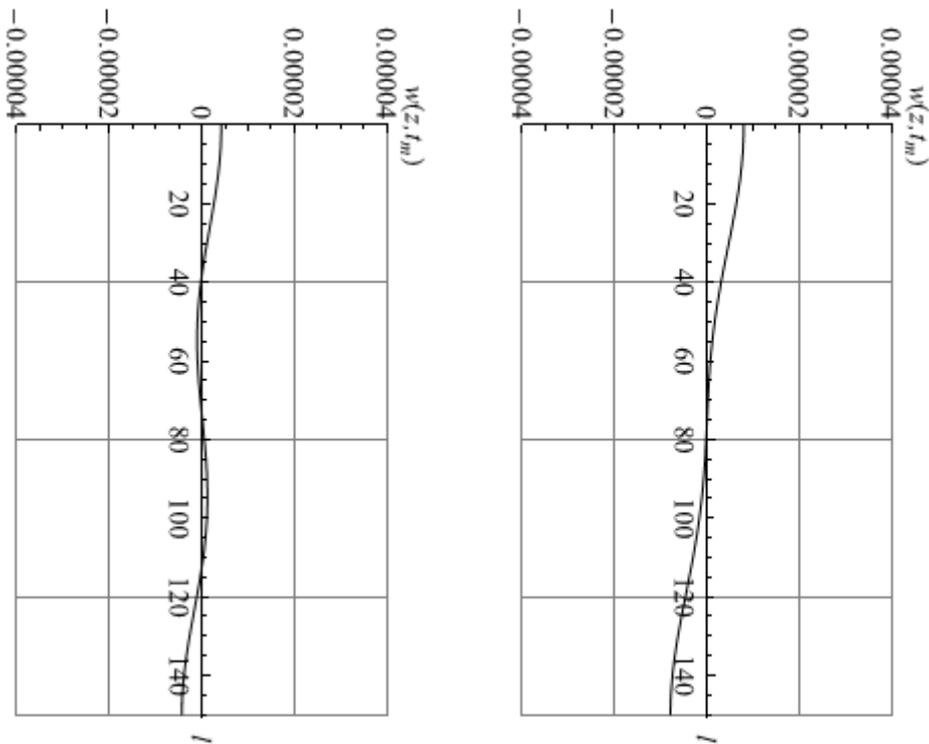
На рисунках 7, 8 изображены фазовые портреты поперечных и продольных колебаний бурильной колонны. Для поперечных колебаний  $v(z, t)$  фазовый портрет аналогичен фазовому портрету  $u(z, t)$  (рисунок 7). Расчеты проведены при следующих параметрах:  $l = 150 m$ ,

$\omega = 30 об / мин$ ,  $t = 200c$ , поперечное сечение  $z_k = \frac{4}{9}$ . Ввиду нелинейности, фазовый портрет отличается от фазового портрета классической линейной теории колебаний. Однако из рисунков установлено, что колебательный процесс устойчив с течением любого промежутка времени.



а)  $t_m = 18,97 c$

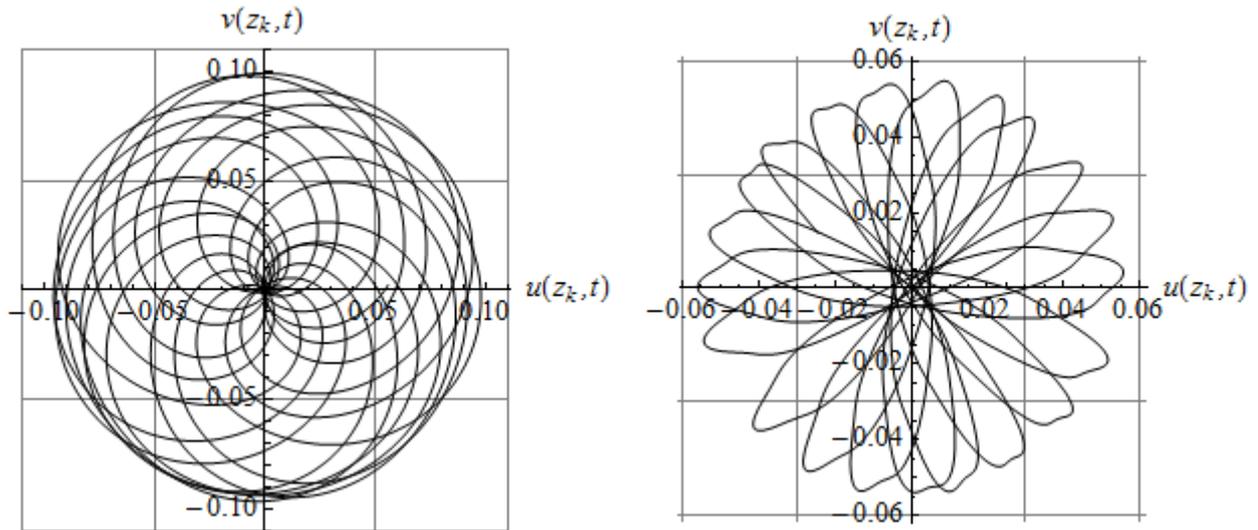
б)  $t_m = 20,5 c$



в)  $t_m = 58,1 c$

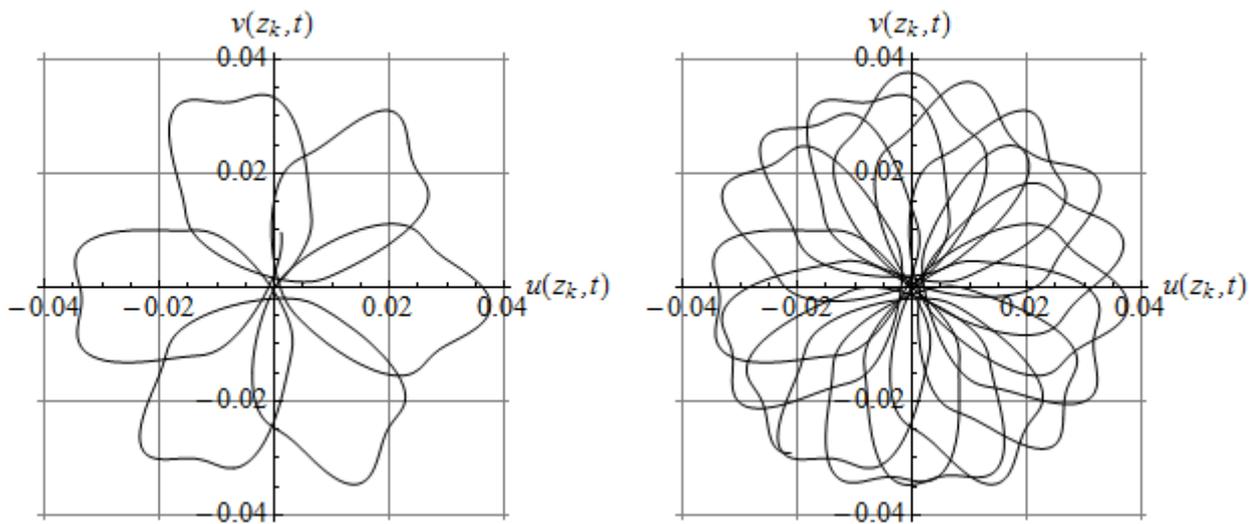
г)  $t_m = 97,0637 c$

Рисунок 4 – Распространение продольных колебаний  $W(z, t_m)$  по длине буровой колонны



а)  $l = 150 \text{ м}, \omega = 30 \text{ об / мин}$  б)  $l = 100 \text{ м}, \omega = 5 \text{ об / мин}$

Рисунок 5 – Параметрические кривые поперечных колебаний буровой колонны



а)  $t = 52 \text{ с}$

б)  $t = 150 \text{ с}$

Рисунок 6 – Параметрические кривые поперечных колебаний буровой колонны

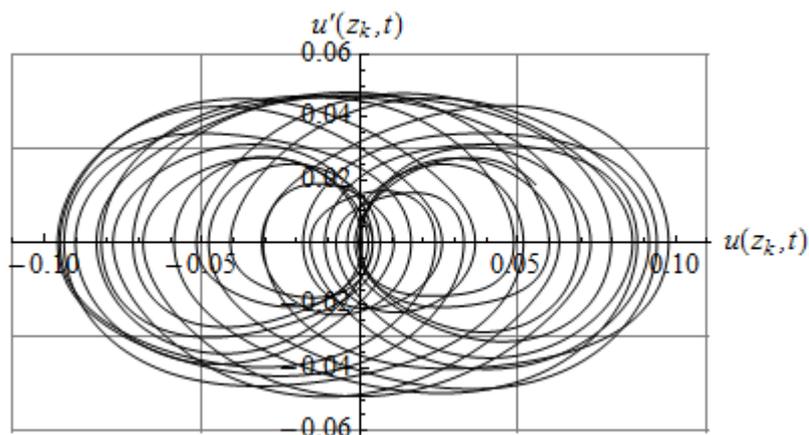


Рисунок 7 – Фазовый портрет поперечных колебаний  $u(z, t)$  буровой колонны

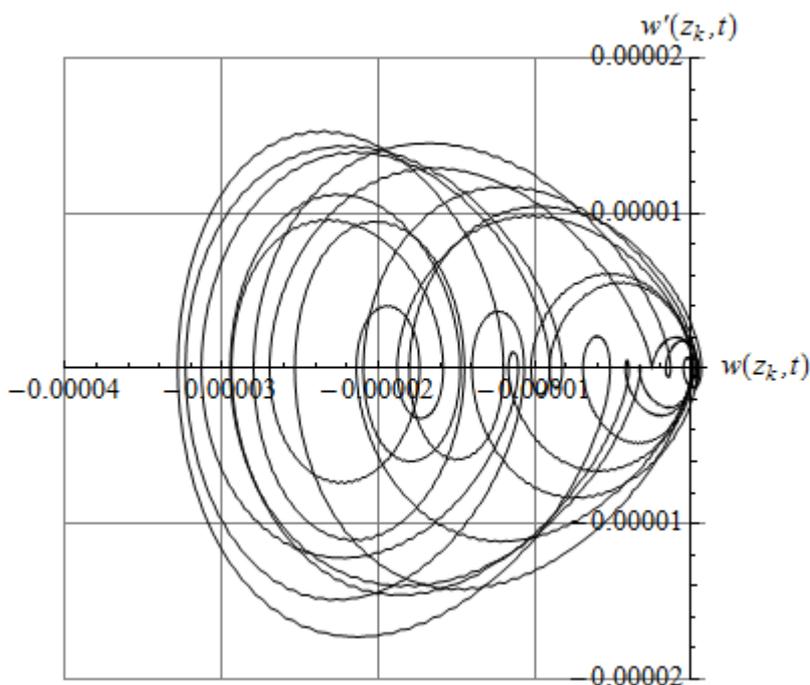


Рисунок 8 – Фазовый портрет продольных колебаний  $w(z, t)$  буровой колонны

**Заключение.** В работе разработана нелинейная математическая модель продольно-поперечных колебаний буровых колонн, используемых в нефтегазодобывающей промышленности. В результате ее численного анализа установлен нелинейный характер колебательного процесса буровых колонн, отличный от случая, когда их деформации полагаются малыми. При анализе продольных колебаний установлено, что колебания верхней половины буровой колонны направлены вниз вдоль оси  $z$ , а колебания нижней половины – вверх. Что свидетельствует о сжатии буровой колонны при действии на нее внешних нагрузок и при эксплуатации. При изучении фазовых портретов поперечных и продольных колебаний буровой колонны установлено, что колебательные процессы, возникающие при проходке буровой колонной скважины, являются устойчивыми для выбранных геометрических и технологических характеристик буровой штанги.

*Работа была выполнена в рамках проекта ГФ-4 №5453 грантового финансирования Министерства Образования и Науки Республики Казахстан.*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Вудс Г., Лубинский А. Искривление скважин при бурении. – М.: Гостоптехиздат, 1960. – 161 с.
- [2] Симонов В.В., Юнин Е.К. Влияние колебательных процессов на работу бурильного инструмента. – М.: Недра, 1977. – 217 с.
- [3] Юртаев В.Г. Динамика буровых установок. – М.: Наука, 1987. – 156 с.
- [4] Gulyaev V.I., Gaidachuk V.V., Glushakova O.V. Andronov-Hopf bifurcations in wave models of torsional vibrations of drill strings. // *International Applied Mechanics*. – 2011. – Vol. 46(11). – P. 1275-1283.
- [5] Hakimi H., Moradi S. Drillstring vibration analysis using differential quadrature method. // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. – 2010. – Vol. 70. – P. 235–242.
- [6] Vaz M.A., Patel M.N. Analysis of drill strings in vertical and deviated holes using the Galerkin technique. // *Engineering structures*. – 1995. – Vol. 17(6). – P. 437-442.
- [7] Nandakumar K., Wiercigroch M. Stability analysis of a state dependent delayed, coupled two DOF model of drill-string vibration. // *Journal of Sound and Vibration*. – 2013. – Vol. 332. – P. 2575–2592.
- [8] Gulyayev, V.I., Borshch, O.I. Free vibrations of drill strings in hyper deep vertical bore-wells. // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. – 2011. – Vol. 78. – P. 759–764.
- [9] Гуляев В.И. и др. Квазистатические критические состояния колонн глубокого бурения. // *Проблемы прочности*. – 2006. – №5. – С. 109-119.
- [10] Гуляев В.И., Худолий С.Н., Борщ Е.И. Колебания кружения конструкции низа бурильной колонны. // *Проблемы прочности*. – 2010, №6. – С. 13-25.
- [11] Yigit, A.S., Christoforou, A.P. Coupled axial and transverse vibrations of oilwell drillstrings. // *Journal of Sound and Vibration*. – 1996. – Vol. 195 (4). – P. 617-627.
- [12] Christoforou, A.P., Yigit, A.S. Dynamic modeling of rotating drillstrings with borehole interactions. // *Journal of Sound and Vibration*. – 1997. – Vol. 206 (2). – P. 243-260.
- [13] Хаджиева Л.А., Умбеткулова А.Б. Об аппроксимации нелинейных колебаний сжато-скрученной буровой штанги при конечных деформациях // *Известия НАН РК, серия физико-математическая*. – 2014. – №1 (293). – С.69-75.
- [14] Khajiyeva L.A., Kydyrbekuly A.B., Sergaliyev A., Umbetkulova A. Simulation of Movement of Drill Rods at Large Deformations. *Advanced Materials Research*, Vol.702 (2013). Trans. Tech. Publications, Switzerland, pp. 253-258.
- [15] Christoforou A.P., Yigit A.S. Dynamic modeling of rotating drill strings with borehole interactions. *Journal of Sound and Vibration*, 206(2), 243-260, 1997.
- [16] Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. - М.- Л.: ОГИЗ, 1948. – 211с.
- [17] Вибрации в технике. Справочник: в 6-и т. – М.: Машиностроение, 1978. - Т.1. – 352с.
- [18] Вибрации в технике. Справочник: в 6-и т. – М.: Машиностроение, 1979. - Т.2. – 351с.
- [19] Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. – Изд. 2-е, переработанное. – М.: Машиностроение, 1970. - 736 с.
- [20] Филиппов А.П. и др. Численные методы в прикладной теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1968. – 250 с.

REFERENCES

- [1] Vuds G., Lubinskij A. Curvature of the Boreholes During Drilling. M.: Gostoptehizdat, 1960, 161 p. (in Russ)
- [2] Simonov V.V., Junin E.K. Influence of Oscillatory Processes at Work of Drilling Tool. M.: Nedra, 1977, 217 p. (in Russ)
- [3] Jurtaev V.G. Dynamics of Drilling Rigs. M.: Nauka, 1987, 156 p. (in Russ)
- [4] Gulyaev V.I., Gaidachuk V.V., Glushakova O.V. Andronov-Hopf bifurcations in wave models of torsional vibrations of drill strings. *International Applied Mechanics*, 2011, Vol. 46(11), pp. 1275-1283.
- [5] Hakimi H., Moradi S. Drillstring vibration analysis using differential quadrature method. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2010, Vol. 70, pp. 235–242.
- [6] Vaz M.A., Patel M.N. Analysis of drill strings in vertical and deviated holes using the Galerkin technique. *Engineering structures*, 1995, Vol. 17(6), pp. 437-442.
- [7] Nandakumar K., Wiercigroch M. Stability analysis of a state dependent delayed, coupled two DOF model of drill-string vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, Vol. 332, pp. 2575–2592.
- [8] Gulyayev, V.I., Borshch, O.I. Free Vibrations of Drill Strings in Hyper Deep Vertical Bore-wells. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2011, Vol. 78, pp. 759–764.
- [9] Guljaev V.I. and others. Quasi Critical State of Deep Drilling Columns. *Problemy prochnosti*, 2006, №5, pp. 109-119. (in Russ)
- [10] Guljaev V.I., Hudolij S.N., Borshh E.I. Fluctuations of Whirling Designs BHA. *Problemy prochnosti*, 2010, №6, pp. 13-25. (in Russ)
- [11] Yigit, A.S., Christoforou, A.P. Coupled axial and transverse vibrations of oilwell drillstrings. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, Vol. 195 (4), pp. 617-627.
- [12] Christoforou, A.P., Yigit, A.S. Dynamic modeling of rotating drillstrings with borehole interactions. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, Vol. 206 (2), pp. 243-260.
- [13] Khajiyeva L.A., Umbetkulova A.B. About the Approximation of Nonlinear Fluctuations of Compressed and Twisted Drilling Rods at the Finite Deformation. *Izvestija NAN RK, serija fiziko-matematicheskaja*, 2014, №1 (293), pp.69-75. (in Russ)
- [14] Khajiyeva L.A., Kydyrbekuly A.B., Sergaliyev A., Umbetkulova A. Simulation of Movement of Drill Rods at Large Deformations. *Advanced Materials Research*. Trans. Tech. Publications, Switzerland, 2013, Vol.702, pp. 253-258.

- [15] Christoforov A.P., Yigit A.S. Dynamic modeling of rotating drill strings with borehole interactions. Journal of Sound and Vibration, 1997, 206(2), pp. 243-260.
- [16] Novozhilov V.V. Fundamentals of Nonlinear Elasticity. M.- L.: OGIZ, 1948, 211p. (in Russ)
- [17] Vibration in the Technique. Spravochnik: v 6-i t. M.: Mashinostroenie, 1978, vol.1, 352p. (in Russ)
- [18] Vibration in the Technique. Spravochnik: v 6-i t. M.: Mashinostroenie, 1979, vol.2, 351p. (in Russ)
- [19] Philippov A.P. Fluctuations of Deformable Systems. Izd. 2-e, pererabotannoe. M.: Mashinostroenie, 1970, 736p. (in Russ)
- [20] Philippov A.P. and others. Numerical Methods in Applied Theory of Elasticity. Kiev: Nauk. dumka, 1968, 250p. (in Russ)

**А. Б. Үмбетқұлова**

Әль-Фараби атындағы қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

**БҰРҒЫЛАУ ҚАРНАҒЫНЫҢ КӨЛБЕУ-КӨЛДЕНЕҢ ТЕРБЕЛІСІН  
МОДЕЛЬДЕУ ЖӘНЕ ТАЛДАУ**

**Аннотация.** Мақалада мұнай және газ ұнғымасын бұрғылау үшін қолданылатын бұрғылау қарнағының көлбеу-көлденең тербелесінің сызықсыз динамикалық математикалық моделі құрылған. Бұрғылау қарнағының серпімді деформация моделі В.В.Новожиловтың ақырлы деформациялар теориясына сәйкес орнатылады. Бұрғылау қарнағы серпімді айналмалы біліс ретінде қаралған, оған жүк-салмақ пен бұрау моменті әсер етеді. Остроградский-Гамильтон әдісі арқылы көлбеу және көлденең сызықсыз модельдер тікелей интеграция күрделілігіне байланысты айнымалыларды ажырату әдісін қолданып дербес туындылы теңдеу жүйесі сызықсыз дифференциалдық теңдеу жүйесіне келтіріледі. Модельді сандық талдауы символдық Wolfram Mathematica пакеті арқылы шығарылған.

**Түйін сөздер:** бұрғылау қарнағы, сызықсыз модель, көлбеу-көлденең тербелісі, Бубнов-Галеркин әдісі.

---

## **Publication Ethics and Publication Malpractice in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct ([http://publicationethics.org/files/u2/New\\_Code.pdf](http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf)). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz)

**ISSN 2518-1467 (Online), ISSN 1991-3494 (Print)**

<http://www.bulletin-science.kz/index.php/ru/>

Редакторы *М. С. Ахметова, Д. С. Аленов, Т. М. Апендиев*  
Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 24.02.2017.

Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.  
12,4 п.л. Тираж 2000. Заказ 1.