

ISSN 2518-1467 (Online),
ISSN 1991-3494 (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Ш Ы С Ы

ВЕСТНИК

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

THE BULLETIN

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

1944 ЖЫЛДАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С 1944 ГОДА
PUBLISHED SINCE 1944

5

АЛМАТЫ
АЛМАТЫ
ALMATY

2017

SEPTEMBER
СЕНТЯБРЬ
ҚЫРКҮЙЕК

Б а с р е д а к т о р ы

х. ғ. д., проф., ҚР ҰҒА академигі

М. Ж. Жұрынов

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

Абиев Р.Ш. проф. (Ресей)
Абишев М.Е. проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)
Аврамов К.В. проф. (Украина)
Аппель Юрген проф. (Германия)
Баймуқанов Д.А. проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)
Байпақов К.М. проф., академик (Қазақстан)
Байтулин И.О. проф., академик (Қазақстан)
Банас Иозеф проф. (Польша)
Берсимбаев Р.И. проф., академик (Қазақстан)
Велихов Е.П. проф., РҒА академигі (Ресей)
Гашимзаде Ф. проф., академик (Әзірбайжан)
Гончарук В.В. проф., академик (Украина)
Давлетов А.Е. проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)
Джрбашян Р.Т. проф., академик (Армения)
Қалимолдаев М.Н. проф., академик (Қазақстан), бас ред. орынбасары
Лаверов Н.П. проф., академик РАН (Россия)
Лупашку Ф. проф., корр.-мүшесі (Молдова)
Мохд Хасан Селамат проф. (Малайзия)
Мырхалықов Ж.У. проф., академик (Қазақстан)
Новак Изабелла проф. (Польша)
Огарь Н.П. проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)
Полещук О.Х. проф. (Ресей)
Поняев А.И. проф. (Ресей)
Сагиян А.С. проф., академик (Армения)
Сатубалдин С.С. проф., академик (Қазақстан)
Таткеева Г.Г. проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)
Умбетаев И. проф., академик (Қазақстан)
Хрипунов Г.С. проф. (Украина)
Юлдашбаев Ю.А. проф., РҒА корр.-мүшесі (Ресей)
Якубова М.М. проф., академик (Тәжікстан)

«Қазақстан Республикасы Ұлттық ғылым академиясының Хабаршысы».

ISSN 2518-1467 (Online),

ISSN 1991-3494 (Print)

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы»РҚБ (Алматы қ.)

Қазақстан республикасының Мәдениет пен ақпарат министрлігінің Ақпарат және мұрағат комитетінде
01.06.2006 ж. берілген №5551-Ж мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік

Мерзімділігі: жылына 6 рет.

Тиражы: 2000 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www: nauka-nanrk.kz, bulletin-science.kz

© Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы, 2017

Типографияның мекенжайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Муратбаева көш., 75.

Г л а в н ы й р е д а к т о р
д. х. н., проф. академик НАН РК
М. Ж. Журинов

Р е д а к ц и о н н а я к о л л е г и я:

Абиев Р.Ш. проф. (Россия)
Абишев М.Е. проф., член-корр. (Казахстан)
Аврамов К.В. проф. (Украина)
Апель Юрген проф. (Германия)
Баймуканов Д.А. проф., чл.-корр. (Казахстан)
Байпаков К.М. проф., академик (Казахстан)
Байтулин И.О. проф., академик (Казахстан)
Банас Иозеф проф. (Польша)
Берсимбаев Р.И. проф., академик (Казахстан)
Велихов Е.П. проф., академик РАН (Россия)
Гашимзаде Ф. проф., академик (Азербайджан)
Гончарук В.В. проф., академик (Украина)
Давлетов А.Е. проф., чл.-корр. (Казахстан)
Джрбашян Р.Т. проф., академик (Армения)
Калимолдаев М.Н. академик (Казахстан), зам. гл. ред.
Лаверов Н.П. проф., академик РАН (Россия)
Лупашку Ф. проф., чл.-корр. (Молдова)
Мохд Хасан Селамат проф. (Малайзия)
Мырхалыков Ж.У. проф., академик (Казахстан)
Новак Изабелла проф. (Польша)
Огарь Н.П. проф., чл.-корр. (Казахстан)
Полещук О.Х. проф. (Россия)
Поняев А.И. проф. (Россия)
Сагиян А.С. проф., академик (Армения)
Сатубалдин С.С. проф., академик (Казахстан)
Таткеева Г.Г. проф., чл.-корр. (Казахстан)
Умбетаев И. проф., академик (Казахстан)
Хрипунов Г.С. проф. (Украина)
Юлдашбаев Ю.А. проф., член-корр. РАН (Россия)
Якубова М.М. проф., академик (Таджикистан)

«Вестник Национальной академии наук Республики Казахстан».

ISSN 2518-1467 (Online),

ISSN 1991-3494 (Print)

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5551-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год

Тираж: 2000 экземпляров

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел. 272-13-19, 272-13-18.

www: nauka-nanrk.kz, bulletin-science.kz

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2017

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75

E d i t o r i n c h i e f

doctor of chemistry, professor, academician of NAS RK

M. Zh. Zhurinov

E d i t o r i a l b o a r d:

Abiyev R.Sh. prof. (Russia)
Abishev M.Ye. prof., corr. member. (Kazakhstan)
Avramov K.V. prof. (Ukraine)
Appel Jurgen, prof. (Germany)
Baimukanov D.A. prof., corr. member. (Kazakhstan)
Baipakov K.M. prof., academician (Kazakhstan)
Baitullin I.O. prof., academician (Kazakhstan)
Joseph Banas, prof. (Poland)
Bersimbayev R.I. prof., academician (Kazakhstan)
Velikhov Ye.P. prof., academician of RAS (Russia)
Gashimzade F. prof., academician (Azerbaijan)
Goncharuk V.V. prof., academician (Ukraine)
Davletov A.Ye. prof., corr. member. (Kazakhstan)
Dzhrbashian R.T. prof., academician (Armenia)
Kalimoldayev M.N. prof., academician (Kazakhstan), deputy editor in chief
Laverov N.P. prof., academician of RAS (Russia)
Lupashku F. prof., corr. member. (Moldova)
Mohd Hassan Selamat, prof. (Malaysia)
Myrkhalykov Zh.U. prof., academician (Kazakhstan)
Nowak Isabella, prof. (Poland)
Ogar N.P. prof., corr. member. (Kazakhstan)
Poleshchuk O.Kh. prof. (Russia)
Ponyaev A.I. prof. (Russia)
Sagiyani A.S. prof., academician (Armenia)
Satubaldin S.S. prof., academician (Kazakhstan)
Tatkeyeva G.G. prof., corr. member. (Kazakhstan)
Umbetayev I. prof., academician (Kazakhstan)
Khripunov G.S. prof. (Ukraine)
Yuldashbayev Y.A., prof. corresponding member of RAS (Russia)
Yakubova M.M. prof., academician (Tadjikistan)

Bulletin of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

ISSN 2518-1467 (Online),

ISSN 1991-3494 (Print)

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of Information and Archives of the Ministry of Culture and Information of the Republic of Kazakhstan N 5551-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 2000 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
<http://nauka-nanrk.kz/>, <http://bulletin-science.kz>

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2017

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

M. A. Beisenbi¹, S. T. Suleimenova¹, A. A. Taurbekova²

¹L. N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan,

²Almaty University of Power Engineering and Telecommunications, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: beisenbi_ma@enu.kz, s.t.suleimenova@gmail.com, seytekova_aa@bk.ru

RESEARCH OF ROBUST STABILITY OF CONTROL SYSTEMS WITH M INPUTS AND N OUTPUTS IN THE CASE OF CATASTROPHE ELLIPTICAL UMBILIC

Abstract. This article is cover the study of control systems with a high potential of robust stability is formed in class of three-parameter structurally stable mapping (elliptical umbilic) for objects with m inputs and n outputs. Research of robust stability of control systems based on the construction of Lyapunov function. Lyapunov's function is formed as vector-function, antigradient of which is given by velocity vector's components. Stability region of steady states of the system is obtained in the form of simple inequations according to uncertain parameters of control object and selected controller parameters.

Keywords: robust stability, Lyapunov's function, elliptical umbilic, three-parameter structurally stable mapping.

УДК 681.51

М. А. Бейсенби¹, С. Т. Сулейменова¹, А.А.Таурбекова²

¹Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, Астана, Казахстан,

²Алматинский университет энергетики и связи, Алматы, Казахстан

ИССЛЕДОВАНИЕ РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С M ВХОДАМИ И N ВЫХОДАМИ В КЛАССЕ КАТАСТРОФЫ «ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ОМБИЛИКА»

Аннотация. Данная статья посвящена исследованию робастной устойчивости систем управления с m входами и n выходами, с подходом к построению систем управления в классе трехпараметрических структурно-устойчивых отображений, позволяющих увеличить потенциал робастной устойчивости. Исследование робастной устойчивости систем управления базируется на построении функции Ляпунова. Функция Ляпунова строится в форме вектор-функции, антиградиент которой задается компонентами вектора скорости системы. Область устойчивости установившихся состояний системы получена в виде простейших неравенств по неопределенным параметрам объекта управления и выбираемым параметрам устройства управления.

Ключевые слова: робастная устойчивость, функция Ляпунова, эллиптическая омбилика, трехпараметрические структурно-устойчивые отображения.

Процесс разработки какого-либо технического механизма представляет собой сложную научно-техническую проблему. При реальном функционировании система может отклоняться от заданных, программных движений и совершает некоторые другие. Одной из причин таких действий могут служить наличие небольших отклонений от начального состояния заданного движения, либо наличие малых сил, неучтенных при моделировании систем. Одной из основных задач, которая уже возникает на этапе проектирования системы, является задача обеспечения устойчивости их движений.

Универсальным методом исследования устойчивости динамических систем является метод функции А. М. Ляпунова [1, 2]. В качестве инструмента исследования в методе Ляпунова используются некоторые специальные непрерывно дифференцируемые, обращающие в начале координат в нуль функции, называемые функцией Ляпунова. Использование данного метода сдерживается отсутствием универсального подхода к построению функции Ляпунова. Следует напомнить, что ошибка в выборе и неудача построить необходимой функции Ляпунова не означает неустойчивости системы: она указывает только на неудачу при построении функций Ляпунова [3]. Функция Ляпунова синтезируется форме вектор функции антиградиента, которые задаются компонентами вектора скорости (правой частью уравнения состояния) системы. Область устойчивости стационарных состояний системы получим в виде простейших неравенств по неопределенным параметрам объекта управления.

Рассмотрим систему управления, описываемую уравнением состояния:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (1)$$

где $x(t) \in R^n$ - вектор состояния системы; $u(t) \in R^m$ - управление, $y(t) \in R^l$ - выход системы; $A \in R^{n \times n}$ - матрица состояния; $B \in R^{n \times m}$ - матрица управления.

Закон управления задается в форме трехпараметрических структурно – устойчивых отображений:

$$\begin{aligned} u(x) &= -x_2^3 + 3x_2x_1^2 - k_{12}(x_1^2 + x_2^2) + k_2x_2 + k_1x_1 - \\ &- x_4^3 + 3x_4x_3^2 - k_{34}(x_3^2 + x_4^2) + k_4x_4 + k_3x_3, \dots, - \\ &- x_n^3 + 3x_nx_{n-1}^2 - k_{n-1,n}(x_{n-1}^2 + x_n^2) + k_nx_n + k_{n-1}x_{n-1} \end{aligned} \quad (2)$$

Матрицы A и B имеют следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

В развернутой форме система (1) записывается следующим образом:

$$\begin{cases}
 \dot{x}_1 = -b_{11}x_2^3 + 3b_{11}x_2x_1^2 - b_{11}k_{12}(x_1^2 + x_2^2) + (a_{11} + b_{11}k_1)x_1 + (a_{12} + b_{11}k_2)x_2 + \\
 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n \\
 \dot{x}_2 = -b_{22}x_2^3 + 3b_{22}x_2x_1^2 - b_{22}k_{12}(x_1^2 + x_2^2) + (a_{21} + b_{22}k_1)x_1 + (a_{22} + b_{22}k_2)x_2 + \\
 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n \\
 \dot{x}_3 = -b_{33}x_4^3 + 3b_{33}x_4x_3^2 - b_{33}k_{34}(x_3^2 + x_4^2) + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} + b_{33}k_3)x_3 + \\
 + (a_{34} + b_{33}k_4)x_4 + a_{35}x_5 \dots + a_{3n}x_n \\
 \dot{x}_4 = -b_{44}x_4^3 + 3b_{44}x_4x_3^2 - b_{44}k_{34}(x_3^2 + x_4^2) + a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + (a_{43} + b_{44}k_3)x_3 + \dots + \\
 + (a_{44} + b_{44}k_4)x_4 + a_{45}x_5 \dots + a_{4n}x_n \\
 \dots \dots \dots \\
 \dot{x}_{n-1} = -b_{n-1,n-1}x_n^3 + 3b_{n-1,n-1}x_nx_{n-1}^2 - b_{n-1,n-1}k_{n-1,n}(x_{n-1}^2 + x_n^2) + a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \dots + \\
 + (a_{n-1,n-1} + b_{n-1,n-1}k_{n-1})x_{n-1} + (a_{n-1,n} + b_{n-1,n-1}k_n)x_n \\
 \dot{x}_n = -b_{n,n}x_n^3 + 3b_{n,n}x_nx_{n-1}^2 - b_{n,n}k_{n-1,n}(x_{n-1}^2 + x_n^2) + a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + \\
 + (a_{n,n-1} + b_{n,n}k_{n-1})x_{n-1} + (a_{n,n} + b_{n,n}k_n)x_n
 \end{cases} \tag{3}$$

Установившиеся состояния системы (3) будут определены решением уравнений:

$$\begin{cases}
 -b_{11}x_{2s}^3 + 3b_{11}x_{2s}x_{1s}^2 - b_{11}k_{12}(x_{1s}^2 + x_{2s}^2) + (a_{11} + b_{11}k_1)x_{1s} + (a_{12} + b_{11}k_2)x_{2s} + \\
 + a_{13}x_{3s} + \dots + a_{1n}x_{ns} = 0 \\
 -b_{22}x_{2s}^3 + 3b_{22}x_{2s}x_{1s}^2 - b_{22}k_{12}(x_{1s}^2 + x_{2s}^2) + (a_{21} + b_{22}k_1)x_{1s} + (a_{22} + b_{22}k_2)x_{2s} + \\
 + a_{23}x_{3s} + \dots + a_{2n}x_{ns} = 0 \\
 \dots \dots \dots \\
 -b_{n,n}x_{ns}^3 + 3b_{n,n}x_{ns}x_{n-1,s}^2 - b_{n,n}k_{n-1,n}(x_{n-1,s}^2 + x_{n,s}^2) + a_{n,1}x_{1s} + a_{n,2}x_{2s} + \dots + \\
 + (a_{n,n-1} + b_{n,n}k_{n-1})x_{n-1,s} + (a_{n,n} + b_{n,n}k_n)x_{ns} = 0
 \end{cases} \tag{4}$$

Стационарные состояния из системы (4) могут быть определены как:

$$x_{1s} = 0, x_{2s} = 0, \dots, x_{ns} = 0 \tag{5}$$

$$x_{is} = \frac{a_{ii}}{b_{ii}k_{i,i+1}} + \frac{k_i}{k_{i,i+1}} x_{js} = 0 \text{ при } i \neq j, i = \overline{1, n} \tag{6}$$

$$x_{i+1,s} = -\frac{b_{i+1,i+1}k_{i,i+1} \pm \sqrt{(b_{i+1,i+1}k_{i,i+1})^2 + 4b_{i+1,i+1}a_{i+1,i+1} + 4b_{i+1,i+1}^2k_{i,i+1}}}{2b_{i+1,i+1}} \tag{7}$$

Исследуем устойчивость стационарного состояния (5) на основе предложенного подхода методом функции Ляпунова [4]. Рассчитываем компоненты вектора градиента от компонентов вектор-функции Ляпунова [5]. Далее находится полная производная по времени от вектор-функции Ляпунова:

$$\begin{aligned}
\frac{dV_1(x)}{dt} &= -b_{11}^2 \left[k_{12}x_1^2 - 3x_2x_1^2 - \left(k_1 + \frac{a_{11}}{b_{11}} \right) x_1 \right]^2 - b_{11}^2 \left[x_2^3 - 3x_2x_1^2 + k_{12}x_2^2 - \left(k_2 + \frac{a_{12}}{b_{11}} \right) x_2 \right]^2 - \\
&- a_{13}^2x_3^2 - \dots - a_{1n}^2x_n^2 \\
\frac{dV_2(x)}{dt} &= -b_{22}^2 \left[k_{12}x_1^2 - 3x_2x_1^2 - \left(k_1 + \frac{a_{21}}{b_{22}} \right) x_1 \right]^2 - b_{22}^2 \left[x_2^3 - 3x_2x_1^2 + k_{12}x_2^2 - \left(k_2 + \frac{a_{22}}{b_{22}} \right) x_2 \right]^2 - \\
&- a_{23}^2x_3^2 - \dots - a_{2n}^2x_n^2 \\
&\dots\dots\dots \\
\frac{dV_{n-1}(x)}{dt} &= -a_{n-1,1}^2x_1^2 - a_{n-1,2}^2x_2^2 - \dots - b_{n-1,n-1}^2 \left[k_{n-1,n}x_{n-1}^2 - 3x_nx_{n-1}^2 - \left(k_{n-1} + \frac{a_{n-1,n-1}}{b_{n-1,n-1}} \right) x_{n-1} \right]^2 - \\
&- b_{n-1,n-1}^2 \left[x_n^3 - 3x_nx_{n-1}^2 + k_{n-1,n}x_n^2 - \left(k_n + \frac{a_{n-1,n}}{b_{n-1,n-1}} \right) x_n \right]^2 \\
\frac{dV_n(x)}{dt} &= -a_{n,1}^2x_1^2 - a_{n,2}^2x_2^2 - \dots - b_{n,n}^2 \left[k_{n-1,n}x_{n-1}^2 - 3x_nx_{n-1}^2 - \left(k_{n-1} + \frac{a_{n,n-1}}{b_{n,n}} \right) x_{n-1} \right]^2 - \\
&- b_{n,n}^2 \left[x_n^3 - 3x_nx_{n-1}^2 + k_{n-1,n}x_n^2 - \left(k_n + \frac{a_{n,n}}{b_{n,n}} \right) x_n \right]^2
\end{aligned}$$

Полную производную по времени от скалярной функции Ляпунова $V(x) = (V_1(x), V_2(x), \dots)$ получим в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{dV(x)}{dt} &= -b_{11}^2 \left[k_{12}x_1^2 - 3x_2x_1^2 - \left(k_1 + \frac{a_{11}}{b_{11}} \right) x_1 \right]^2 - b_{11}^2 \left[x_2^3 - 3x_2x_1^2 + k_{12}x_2^2 - \left(k_2 + \frac{a_{12}}{b_{11}} \right) x_2 \right]^2 - \\
&- b_{22}^2 \left[k_{12}x_1^2 - 3x_2x_1^2 - \left(k_1 + \frac{a_{21}}{b_{22}} \right) x_1 \right]^2 - b_{22}^2 \left[x_2^3 - 3x_2x_1^2 + k_{12}x_2^2 - \left(k_2 + \frac{a_{22}}{b_{22}} \right) x_2 \right]^2 - \\
&- a_{13}^2x_3^2 - \dots - a_{1n}^2x_n^2 - a_{23}^2x_3^2 - \dots - a_{2n}^2x_n^2 - \dots - a_{n-1,1}^2x_1^2 - a_{n-1,2}^2x_2^2 - \dots - \\
&- b_{n-1,n-1}^2 \left[k_{n-1,n}x_{n-1}^2 - 3x_nx_{n-1}^2 - \left(k_{n-1} + \frac{a_{n-1,n-1}}{b_{n-1,n-1}} \right) x_{n-1} \right]^2 - \\
&- b_{n-1,n-1}^2 \left[x_n^3 - 3x_nx_{n-1}^2 + k_{n-1,n}x_n^2 - \left(k_n + \frac{a_{n-1,n}}{b_{n-1,n-1}} \right) x_n \right]^2 - a_{n,1}^2x_1^2 - a_{n,2}^2x_2^2 - \dots - \\
&- b_{n,n}^2 \left[k_{n-1,n}x_{n-1}^2 - 3x_nx_{n-1}^2 - \left(k_{n-1} + \frac{a_{n,n-1}}{b_{n,n}} \right) x_{n-1} \right]^2 - b_{n,n}^2 \left[x_n^3 - 3x_nx_{n-1}^2 + k_{n-1,n}x_n^2 - \left(k_n + \frac{a_{n,n}}{b_{n,n}} \right) x_n \right]^2
\end{aligned} \tag{8}$$

Исходя из (8) можно заключить вывод, что достаточное условие асимптотической устойчивости системы выполняется, так как полная производная по времени от вектор – функции Ляпунова есть знакоотрицательная функция.

По компонентам градиента строим компоненты вектор функции Ляпунова:

$$\begin{aligned}
 V_1(x) &= \frac{1}{3}b_{11}k_{12}x_1^3 - b_{11}x_2x_1^3 - \frac{1}{2}b_{11}\left(k_1 + \frac{a_{11}}{b_{11}}\right)x_1^2 + \frac{1}{4}b_{11}x_2^4 - \frac{3}{2}b_{11}x_2^2x_1^2 + \frac{1}{3}b_{11}k_{12}x_2^3 - \\
 &- \frac{1}{2}b_{11}\left(k_2 + \frac{a_{12}}{b_{11}}\right)x_2^2 - \frac{1}{2}a_{13}x_3^2 - \dots - \frac{1}{2}a_{1n}x_n^2 \\
 V_2(x) &= \frac{1}{3}b_{22}k_{12}x_1^3 - b_{22}x_2x_1^3 - \frac{1}{2}b_{22}\left(k_1 + \frac{a_{21}}{b_{22}}\right)x_1^2 + \frac{1}{4}b_{22}x_2^4 - \frac{3}{2}b_{22}x_2^2x_1^2 + \frac{1}{3}b_{22}k_{12}x_2^3 - \\
 &- \frac{1}{2}b_{22}\left(k_2 + \frac{a_{22}}{b_{22}}\right)x_2^2 - \frac{1}{2}a_{23}x_3^2 - \dots - \frac{1}{2}a_{2n}x_n^2 \\
 &\dots\dots\dots \\
 V_{n-1}(x) &= -\frac{1}{2}a_{n-1,1}x_1^2 - \frac{1}{2}a_{n-1,2}x_2^2 - \dots + \frac{1}{3}b_{n-1,n-1}k_{n-1,n}x_{n-1}^3 - b_{n-1,n-1}x_nx_{n-1}^3 - \frac{1}{2}b_{n-1,n-1}\left(k_{n-1} + \frac{a_{n-1,n-1}}{b_{n-1,n-1}}\right)x_{n-1}^2 + \\
 &+ \frac{1}{4}b_{n-1,n-1}x_n^4 - \frac{3}{2}b_{n-1,n-1}x_n^2x_{n-1}^2 + \frac{1}{3}b_{n-1,n-1}k_{n-1,n}x_n^3 - \frac{1}{2}b_{n-1,n-1}\left(k_n + \frac{a_{n-1,n}}{b_{n-1,n-1}}\right)x_n^2 \\
 V_n(x) &= -\frac{1}{2}a_{n,1}x_1^2 - \frac{1}{2}a_{n,2}x_2^2 - \dots + \frac{1}{3}b_{n,n}k_{n-1,n}x_{n-1}^3 - b_{n,n}x_nx_{n-1}^3 - \frac{1}{2}b_{n,n}\left(k_{n-1} + \frac{a_{n,n-1}}{b_{n,n}}\right)x_{n-1}^2 + \\
 &+ \frac{1}{4}b_{n,n}x_n^4 - \frac{3}{2}b_{n,n}x_n^2x_{n-1}^2 + \frac{1}{3}b_{n,n}k_{n-1,n}x_n^3 - \frac{1}{2}b_{n,n}\left(k_n + \frac{a_{n,n}}{b_{n,n}}\right)x_n^2
 \end{aligned}$$

В скалярной форме функция Ляпунова представима в виде:

$$\begin{aligned}
 V(x) &= \frac{1}{3}b_{11}k_{12}x_1^3 - b_{11}x_2x_1^3 - \frac{1}{2}b_{11}\left(k_1 + \frac{a_{11}}{b_{11}}\right)x_1^2 + \frac{1}{4}b_{11}x_2^4 - \frac{3}{2}b_{11}x_2^2x_1^2 + \frac{1}{3}b_{11}k_{12}x_2^3 - \\
 &- \frac{1}{2}b_{11}\left(k_2 + \frac{a_{12}}{b_{11}}\right)x_2^2 - \frac{1}{2}a_{13}x_3^2 - \dots - \frac{1}{2}a_{1n}x_n^2 + \dots - \frac{1}{2}a_{n,1}x_1^2 - \frac{1}{2}a_{n,2}x_2^2 - \dots + \\
 &+ \frac{1}{3}b_{n,n}k_{n-1,n}x_{n-1}^3 - b_{n,n}x_nx_{n-1}^3 - \frac{1}{2}b_{n,n}\left(k_{n-1} + \frac{a_{n,n-1}}{b_{n,n}}\right)x_{n-1}^2 + \frac{1}{4}b_{n,n}x_n^4 - \\
 &- \frac{3}{2}b_{n,n}x_n^2x_{n-1}^2 + \frac{1}{3}b_{n,n}k_{n-1,n}x_n^3 - \frac{1}{2}b_{n,n}\left(k_n + \frac{a_{n,n}}{b_{n,n}}\right)x_n^2
 \end{aligned} \tag{9}$$

Условие положительной или отрицательной определенности функции Ляпунова $V(x)$ из (9) неочевидно, вследствие чего будет применена лемма Морса из теории катастроф[6]. Положительная определенность функции Ляпунова будет определяться знаками коэффициентов квадратичной формы, т.е. знаками собственных значений матрицы Гесса (матрицы устойчивости [7]). По лемме Морса функцию Ляпунова (9) локально в окрестности стационарного состояния можно представить в виде квадратичной формы.

$$\begin{aligned}
 V(x) &= -\left[(b_{11} + b_{22})k_1 + a_{11} + \dots + a_{n,1}\right]x_1^2 - \left[(b_{11} + b_{22})k_2 + a_{12} + \dots + a_{n,2}\right]x_2^2 - \dots \\
 &- \left[(b_{n-1,n-1} + b_{nn})k_{n-1} + a_{1,n-1} + \dots + a_{n,n-1}\right]x_{n-1}^2 - \left[(b_{n-1,n-1} + b_{nn})k_n + a_{1,n} + \dots + a_{n,n}\right]x_n^2
 \end{aligned} \tag{10}$$

Условия устойчивости стационарного состояния (5) определяются системой неравенств:

Publication Ethics and Publication Malpractice in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

www.nauka-nanrk.kz

ISSN 2518-1467 (Online), ISSN 1991-3494 (Print)

<http://www.bulletin-science.kz/index.php/ru/>

Редакторы *М. С. Ахметова, Д. С. Аленов, Т. М. Апендиев*
Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 10.10.2017.
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
15,4 п.л. Тираж 2000. Заказ 5.